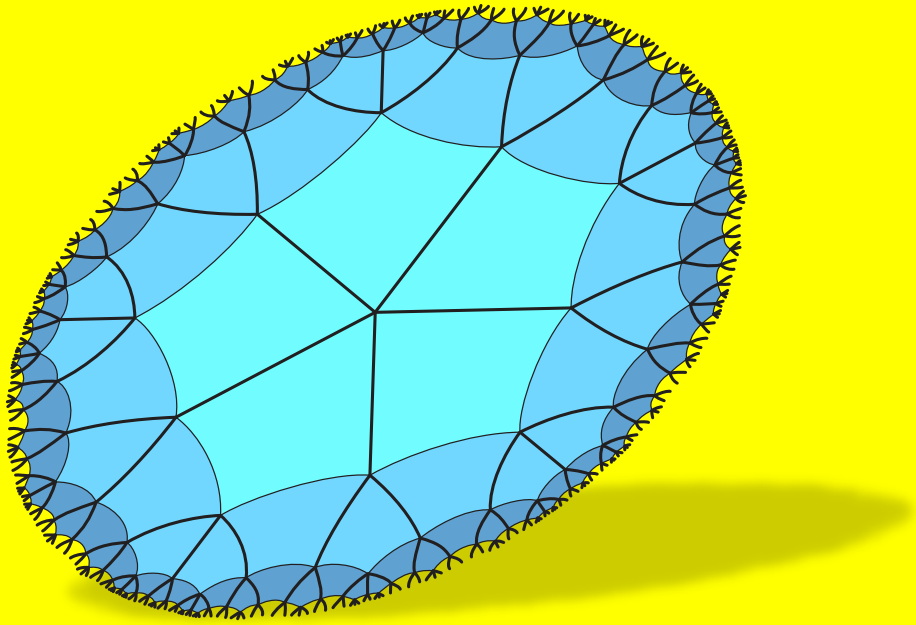
Dimenziók

Matematikai Közlemények

IX. kötet



SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság
2021

Dimenziók

Matematikai Közlemények

IX. kötet

SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet

Soproni Tudós Társaság

2021

Szerkesztők:

Dr. Németh László
egyetemi docens

Dr. Szalay László
egyetemi tanár

Nagy Zsolt
címzetes egyetemi docens

Soproni Egyetem
Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar
Informatikai és Matematikai Intézet
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.

MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.

Kiadja: SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet és Soproni Tudós Társaság

HU ISSN 2064-2172

Tartalomjegyzék

Majdnem szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek számítógépes modellezése 3

Az általánosított hiperbolikus oktonióalgebrákról 13

Az erdei szalonka (*Scolopax rusticola* L.) Magyarországi tavaszi vonulásának modellezése nemlineáris regressziós eljárások segítségével 23

Csillapított rezgések differenciálegyenletes modelljei 33

A háromszög köré- és beírt szabályos háromszögéről 43

Matematikai kiegészítések a harmonikus rezgőmozgás tárgyalásához 51

Áttekintés a hiperbolikus Pascal tetraéderekről 63

doi:10.20312/dim.2021.01

Majdnem szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek számítógépes modellezése

Talata István
Óbudai Egyetem,
Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest,
és BGE Külkereskedelmi Kar, Budapest
talata.istvan@ybl.uni-obuda.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Léteznek olyan konvex poliéderek (ún. ál-Johnson-poliéderek), melyeknek mindegyik sokszöglapja szabályos sokszög vagy annak egy jó közelítése valamilyen értelemben, és esetleg nem is (vagy alig) észrevehető ezeken a poliédereken, hogy a lapjaik között van nem pontosan szabályos sokszög, miközben megmutatható, hogy nem létezik olyan konvex poliéder, melynek ugyanaz a laphálója, és minden lapja szabályos sokszög. Bemutatjuk, hogyan modellezhetők az ilyen poliéderek geometriai módszerek felhasználásával, azaz valamely geometriai szoftverrel megvalósított térbeli geometriai szerkesztésekkel.

ABSTRACT. The near-miss Johnson solids are such convex polyhedra whose faces are regular polygons or polygons whose shape is close to a regular polygon in some sense, and in some cases, it can not be (or it can only be slightly) observed that not all faces are regular polygons – however there is no such convex polyhedron with the same face net having only regular polygons as faces. We show how to model such polyhedron using only geometric methods, that is, how to create a virtual model of that polyhedron using space geometric construction steps with a geometry software.

1. Bevezetés

Olyan konvex poliédereknek a modellezésével fogunk foglalkozni, melyek lapjainak alakja szabályos sokszög vagy annak egy jó közelítése, de nincs olyan konvex poliéder ugyanolyan laphálóval, melynek minden lapja szabályos sokszög lenne. (Ezért egy ilyen poliéder nem lehet egy csupán szabályos sokszög alakú lapok által határolt poliédernek egy kissé deformált változata, ugyanazzal a laphálóval.) És emiatt biztos van olyan lapja a vizsgált poliédernek, amely nem pontosan szabályos sokszög, még ha ahhoz közeli is az alakja. Geometriai modellezést fogunk alkalmazni.

A következőkben röviden áttekintünk néhány kapcsolódó témakört, és összefoglaljuk a számunkra fontos jellemzőit a geometriai modellezésnek, a szerkeszthetőségnek, ill. paraméteres modellezésnek, és a szabályos sokszöglapokkal határolt konvex poliéderek esetében használható geometriai modellezési módszereket. Mindezek után, a következő fejezetben arra keresünk választ, hogyan definiálhatjuk a majdnem szabályos sokszöglapokat, majd utána először megvizsgáljuk, hogy néhány nevezetes poliéderosztály elemei ilyen lapokból állnak-e, majd általánosságban foglalkozunk ilyen lapok által határolt konvex

KULCSSZAVAK. Ál-Johnson-poliéder, dinamikus geometria, számítógépes modellezés.
KEYWORDS. Near-miss Johnson solid, dynamic geometry, computer modelling.

poliéderekkel, később pedig konkrét példákat mutatunk be, felvázolva a szerkesztési módszereket az egyes esetekben. Végül összefoglaljuk a tapasztalatainkat.

1.1. Geometriai modellezés

Nagyon sokféle 3-dimenziós poliéder számítógépes modellezése történhet csupán geometriai módszerekkel. Ekkor egy geometriai szoftver térbeli szerkesztési műveleteit használjuk a poliédermodell pontos vagy közelítő (adott hibahatáron belüli pontosságú) megszerkesztéséhez.

Geometriai módszerekkel történő modellezés esetén egyszerű alakzatokból kiindulva készítünk összetett modellt, új alakzatok vagy segédalakzatok segítségével (pl. szerkesztőegyenesek, szakaszok, körök, síkok, sokszöglapok, gömbök felhasználásával), és geometriai transzformációk (pl. forgatás, eltolás, tükrözés) alkalmazásával. Ilyenkor az egymásra épülő szerkesztési lépések garantálják a poliéderlapok megfelelő illeszkedését. A poliéder esetleges szimmetriáit kihasználva forgatásokkal és tükrözésekkel fejezhető be a modell, garantálva a végső modell megfelelő szimmetriáit.

A geometriai módszerek használata amellett, hogy elegáns, matematikai képletek bevitelétől mentes szerkesztést tesz lehetővé, fejleszti a modellező térlátását és egyéb téri képességeit is, így a konkrét modellezett poliéder egyes geometriai és kombinatorikai tulajdonságait (pl. szimmetriákat, az egyes lapok egymáshoz viszonyított helyzetét is könnyebben felismerheti a modellező, már a modellezési eljárás során megismerve ezeket).

1.2. Szerkeszthetőség és paraméteres modellezés

A szokásos szoftveres térbeli szerkesztési lépések visszavezethetők gömb, sík, térbeli egyenes, térbeli kör alakzatoknak a felvételére és ilyen alakzatok metszéspontjainak a megszerkesztésére, amely műveletek a síkbeli körzővel-vonalzóval történő szerkesztési lépésekhez hasonlóan úgy bővítik a megszerkesztett pontok halmazát, hogy azok koordinátái megfelelő másodfokú testbővítések egymás utáni alkalmazásával mindig megkaphatók. Ezért ha egy poliéder bizonyos csúcspárjainak a távolságának a racionális számok feletti minimálpolinomja nem kettőhatvány, akkor az a poliéder nem szerkeszthető meg csupán racionális koordinátájú pontokból kiindulva (ld. [5]).

Dinamikus geometriai szoftverekkel történő szerkesztések esetén azonban paraméteres poliédermodelleket is tudunk készíteni, azaz a modellezés során később folytonosan változtatható paraméterértékeket (tipikusan geometriai jelentéssel bíró, pl. szög nagyságát vagy szakasz hosszát megadó értékeket) is felhasználhatunk – vagy ennek megfelelő változtatható alakzatokat helyezhetünk el a modellben, pl. pontot körön vagy szakaszon mozgathatunk, amely mozgás szög, ill. távolság változásának feleltethető meg. Így bizonyos nemszerkeszthető poliéderek tetszőleges pontossággal modellezhetők, amennyiben készíthető olyan paraméteres poliédermodell, amelynek a paraméterértékeinek a megfelelő beállításaival a kívánt poliéderközelítés elérhető. Egyetlen paraméter használata esetén, folytonossági meggondolások alapján elég egyszerű a megfelelő paraméterérték megtalálása.

1.3. Számítógépes modellezés szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek esetén

Most áttekintjük, hogy a szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek hogyan modellezhetők geometriai módszerekkel. A szabályos testek (hasonlóság erejéig 5 db ilyen test van) mind szerkeszthetők, és persze a szabályos sokszöglapokkal rendelkező egyenes hasábok és antiprizmák végtelen családjai is szerkeszthetők. Az arkhimédészi, félig szabályos testek (13 db) között azonban már található két nemszerkeszthető test: a pisze kocka és a pisze dodekaéder. A fennmaradó, szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek a

Johnson-poliéderek (ezekből 92 db van), közülük 85 db könnyen szerkeszthető, azonban van 7db olyan Johnson-poliéder, amely nem szerkeszthető (vagy valószínűleg nem szerkeszthető), ezek a J84-J90 sorszámú poliéderek. Azonban a fentebb említett összesen 9 nemszerkeszthető poliéder mindegyikének elkészíthető a virtuális modellje tetszőleges pontossággal, alkalmasan választott 1-paraméteres poliédermodell készítésével, majd a paraméter megfelelő értékre történő beállításával. Mindez azért lehetséges, mert az itt említett poliéderosztályok mindegyikének az elemei rendelkeznek több-kevesebb szimmetriával – enélkül lehet hogy csak legalább 2 paraméteres poliédermodell alkalmazásával tudnánk valamelyik poliédert modellezni, márpedig ezek esetében a paraméterértékek megfelelő beállítása sokkal nehezebben oldható csak meg.

Tehát a szabályos sokszöglapokkal határolt konvex poliéderek többsége szerkeszthető, a fennmaradó 9 test pedig megfelelő 1-paraméteres modellek felhasználásával tetszőleges pontossággal modellezhető egyszerűen, dinamikus geometriai szoftverekkel.

A szabályos testek megszerkeszthetők: elég egyetlen testszögletüket megszerkeszteni, pl. lapjaik felhajtásával. A szabályos hasábok és antiprizmák esetére is működik ez a módszer. Az arkhimédeszi testek többségénél is ez a helyzet, de azok szabályos testekből másképp is előállíthatók: szeléssel, lapok eltolásával, lapok forgatva eltolásával. A legtöbb Johnson-poliéder előállítható arkhimédészi testekből, hasábokból és antiprizmákból geometriai alapműveletekkel (csúcsok által meghatározott síkkal való szelés, közös lap mentén egyesítés).

2. Majdnem szabályos sokszöglapok

Most nézzük, hogyan definiálható precízen, hogy majdnem szabályos sokszögek alkotják egy poliéder lapjait? A lapok alakjának eltérését mérjük majd az ugyanannyi csúcsú szabályos sokszög alakjától. A szakirodalomban van olyan szerző, aki egy poliéderre az összes lapnak az ott áhított egységnyi élhosszú szabályos sokszögektől való eltéréseit úgy méri, hogy összeadja az élhosszak 1-től való eltéréseinek az abszolút értékét az összes élre, és a lapok szögei esetén az ugyanannyi csúcsú szabályos sokszög szögértékeitől való eltérések abszolút értékeinek az összegét veszi. Így a poliéderre két mennyiséget kapunk, az élek abszolút eltéréseinek az összegét és a szögek abszolút eltéréseinek az összegét. Egy másik szerző pedig az egész poliéderre csupán a leghosszabb és legrövidebb él arányát tekinti, ezt az egy mérőszámot használja mérőszámként.

Szerintünk a lapoknak a szabályos sokszögtől való legnagyobb eltérését kell vizsgálni, ez mutatja meg, hogy mennyire észrevehető hogy nem szabályos sokszög alakú egy lap. Úgy gondoljuk, hogy a szabályosságot a szemünkkel lokálisan, laponként ellenőrizzük, méghozzá szimmetriaként, a lap élhosszainak ill. a lap szögeinek az egyenlőségét tesztelve szemünkkel. Ezért vegyük egy lap leghosszabb és legrövidebb oldalainak az arányát (ez legalább 1, mivel a számláló legalább akkora, mint a nevező egy ilyen típusú törtben), valamint a lap legnagyobb és legkisebb szögének a különbségét is számítsuk ki (ez pedig mindig nemnegatív mennyiség, mert a legnagyobb szögből vonjuk ki a legkisebbet). Minden lapra számítsuk ki ezt a két mennyiséget, majd ezek maximumát vegyük mindkét esetben. Jelölje $ER(P)$ az egyes lapokhoz tartozó legnagyobb élarányok maximumát, és jelölje $AD(P)$ az egyes lapokhoz tartozó legnagyobb szögkülönbségek maximumát, egy P konvex poliéder esetén (ER=edge_ratio, AD=angle_difference). Ha az $ER(P)$ legfeljebb $1+\varepsilon$ valamely $\varepsilon > 0$ esetén, és $AD(P)$ legfeljebb δ valamely $\delta > 0$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy a lap alakja az (ε, δ)-hibahatárokon belül közeli a szabályos n-szöghöz, ill. a lap az (ε, δ)-hibahatárokon belül szabályos sokszöglap. *Közel szabályos sokszöglapnak* nevezzünk egy poliéderlapot, ha az teljesíti a következő feltételt:

1) *A poliéder minden lapja legfeljebb az (ε, δ)-hibahatárokon belül közeli egy olyan szabályos sokszöghöz, melynek ugyanannyi csúcsa van, mint a lapnak.*

Ha az ε és δ mennyiségeket megfelelően kicsi pozitív értéknek választjuk, akkor a szemünk tényleg nem látja a különbséget a szabályos sokszög és a tőle (ε, δ)-hibahatárokon belül közeli sokszög között.

A látványon túlmenően van néhány egyszerű szabály, amelynek fenn kell állnia, ha egy konvex poliédernek mindegyik lapja szabályos sokszög:

2) *A lapok egy csúcsnál fekvő szögeinek összege $360°$-nál kisebb legyen mindegyik csúcs esetén.*
3) *Ha két sokszöglap közös éllel csatlakozik egymáshoz, akkor szimmetria miatt, a két sokszöglapból a közös él egyik csúcsába befutó másik két él egymással bezárt szöge megegyezik a közös él másik csúcsába befutó másik két él egymással bezárt szögével.*

Az is elvárás lehet, hogy szabályos sokszöglaphoz közeli alakú lapok esetén egy poliéder megfeleljen ezeknek a szabályoknak akkor is, ha úgy számolunk az esetében, mintha minden lapja szabályos sokszöglap lenne, hogy legalább az ilyen egyszerű lokális szabályoknak megfeleljen a laphálója akár szabályos sokszögekkel is (ezeknél az egyszerű lokális vizsgálatoknál még ne derüljön ki, hogy a poliéder laphálója esetleg nem realizálható szabályos sokszöglapokkal).

A fenti 3 szabályt nevezhetjük 1. feltételnek, 2. feltételnek, ill. 3. feltételnek, melyeknek fenn kell állniuk, hogy a poliéder jelölt maradhasson arra, hagy szabályos sokszöglapok által határolt (az 1. feltétel bármely pozitív (ε, δ)-hibahatárokra fennáll ilyenkor). Ami nem világos, hogy milyen nagynak választhatjuk az ε és δ értékeket, hogy a szemünkkel már ne érzékeljük az eltérést a szabályos sokszögtől, ha a sokszög (ε, δ)-hibahatárokon belül közeli egy szabályos sokszöghöz.

A 2., ill. 3. számú feltételek következményei:

2b) Mindegyik csúcsnál legfeljebb 5 lap találkozik.

2c) 3 db hatszöglap nem találkozhat egy csúcsban.

2d) 2 db hatszöglap és 2 db háromszöglap (összesen 4 lap) nem találkozhat egy csúcsban.

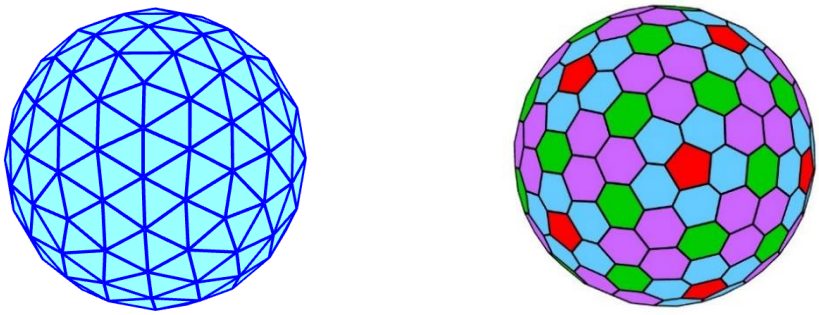
3b) Ha két szabályos sokszöglap közös éllel csatlakozik egymáshoz, és a közös él egyik csúcsánál csak három sokszöglap találkozik, akkor

- *vagy csak három sokszöglap találkozik a közös él másik csúcsánál, és a közös él két csúcsánál található harmadik sokszöglapok egybevágóak (azaz oldalszámuk megegyezik),*
- *vagy a közös él másik csúcsánál legalább négy sokszöglap találkozik, melyek közül az említett közös élre nem illeszkedő legalább két sokszöglap szögeinek összege ennél a másik csúcsnál nagyobb, mint az él egyik csúcsánál található harmadik sokszöglap szöge.*

3. Néhány nevezetes, majdnem szabályos sokszöglapokkal rendelkező poliéderosztály

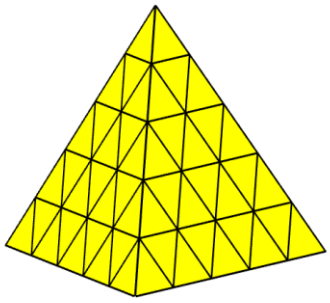
Vannak olyan nevezetes poliéderosztályok, melyek elemei jelöltek lehetnek majdnem szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderekre. Egyik ilyen a *geodézikus poliéderek* családja, a másik a *Goldberg-poliéderek* családja (ld. [4]). Egy geodézikus poliéder csúcsai egy gömbfelületen vannak, csak háromszöglapjai vannak, és ha elég kis háromszögekről van szó (ami nagy csúcsszám esetén teljesül), akkor előfordulhat, hogy sok háromszöglapjának az

alakja elég közeli a szabályos háromszögéhez. De van mindig valahány (legalább 4) csúcsa, ahol legfeljebb 5-5 db háromszöglap találkozik, így ott a kis háromszöglapok csúcsai nem lehetnek 60°-hoz közeliek (mivel a csúcsban találkozó szögek összege 360°-hoz közeli nagy csúcsszám esetén). Így mégse igazán jó jelölt ez a poliédercsalád, pláne mert a 2. feltételt sem teljesítik az ilyen poliéderek szabályos háromszöglapok szögeivel számolva, ugyanis mindig van olyan csúcsa, ahol 6 db háromszöglap találkozik (és nagy csúcsszám esetén az ilyen csúcsok vannak túlnyomó többségben, mondhatjuk, hogy majdnem minden csúcsa ilyen).



1. ábra. Geodézikus dodekaéder L2 és egy Goldberg-poliéder (duális ikozaéder L3)

A Goldberg-poliéderek az ikozaéderes szimmetriájú geodézikus poliéderek duálisai, 12 szabályos ötszöglapjuk van, a többi lap hatszöglap, és mindegyik lap érinti a beírt gömböt. De így amely csúcsnál az ötszöglaphoz csatlakoznak a hatszöglapok, az ott találkozó lapok csúcsszögeinek összege 360°-hoz kellene, hogy közel legyen (ez nagy csúcsszám esetén teljesül), azonban az ötszöglap 108°-os szöge miatt a másik két hatszöglap csúcsszöge annál a csúcsnál nem lehet közel 120°-hoz, így nem lehet közel az alakjuk szabályos hatszöghöz. És itt is fennáll, hogy a 2. feltétel nem teljesül, ha a lapoknál szabályos sokszögek szögeivel számolunk, mivel sok csúcsban három hatszöglap találkozik, melyeknél a szögösszeg 360° lenne.



2. ábra. Szabályos tetraéder lapjainak egy rácsfelosztása

Végül, ha veszünk egy olyan konvex poliédert, melynek lapjai felosztható rácsfelosztással akármilyen sok szabályos háromszögre vagy négyzetre, akkor kicsit elmozdíthatjuk a felosztás csúcsait úgy, hogy egy konvex poliéder csúcsai legyenek, és a poliéder laphálóját a lapok rácsfelosztásai adják. A szabályos tetraéder vagy a kocka ilyen poliéderek, hiszen bármilyen nagy finomságú szabályos háromszögrácsos ill. négyzetrácsos felosztást lehet rárajzolni a háromszöglapjaikra ill. négyzetlapjaikra, de jó pár más poliéder is létezik ilyen tulajdonsággal, pl. a csak szabályos háromszöglapokkal vagy négyzetlapokkal rendelkező poliéderek ilyenek, de előfordulhat szabályos hatszöglap, paralelogramma alakú lap (amely 2 db szabályos háromszögre osztható fel), ill. trapéz alakú lap (amely 3 db szabályos háromszögre osztható fel) az ilyen tulajdonságú poliéderek lapjai között. A rácsfelosztás háromszögei ill. négyszögei kissé

eldeformálódnak a csúcsok elmozdítása során, de azért ilyenkor az megvalósítható, hogy a négyszögek megmaradjanak síkbeli négyszögeknek, és bár már nem lesznek szabályos sokszögek a rácsfelosztásból lett lapok, de tetszőlegesen közeliek lehetnek a szabályos sokszögekhez a lapok a csúcsok elég kismértékű elmozdítása esetén. Így bármely adott $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ esetén is végtelen sok olyan poliéder adódik, amely megfelel az 1. feltételnek – de a 2. feltételnek persze már nem fog megfelelni, ha a lapoknál szabályos sokszögek szögeivel számolunk, mivel akkor sok csúcsban $360°$ jön ki szögösszegnek.

4. Ál-Johnson-poliéderek

Vajon mi a helyzet, ha nem pontosan szabályosak a poliéder lapjai? Először is egy ehhez kapcsolódó tételt említünk: a Cauchy-tétel kimondja, hogy ha egy konvex poliéder lapjainak alakját merevnek tekintjük, és a lapok közös éleit csuklóknak, akkor a poliéder merev, azaz nem deformálható át másféle alakúvá. Sőt, ennél több is igaz: ha adott a sokszöglapok alakja (egybevágóság erejéig) valamint adott a lapháló, amely meghatározza, hogyan csatlakoznak egymáshoz a lapok, akkor legfeljebb egy konvex poliéder létezik, melynek a sokszöglapjai és a hozzá tartozó laphálója megegyeznek ezekkel.

Azt, hogy 92 Johnson-poliéder létezik, még Johnson sejtette meg 1966-ban (ld. [2]), és bár korábban el is ért néhány részeredményt a sejtése igazolásának az irányában (pl. Grünbaummal közös cikkében igazolta 1964-ben, hogy csak véges sok olyan konvex poliéder létezik, melynek minden lapja szabályos sokszög, ld. [1]), de a sejtését végül is Zalgaller bizonyította be 1967-ben (ld. [6]). A véges sok eset vizsgálatakor kiderült, hogy jó pár esetben azért létezik olyan konvex poliéder, melynek mindegyik lapjának az alakja igen közeli egy szabályos sokszöghöz.

*Ál-Johnson-poliéder*nek nevezzük az olyan konvex poliédert, melynek nem minden lapja szabályos sokszög, de a 2. fejezet 1. feltétele teljesül valamely adott ε és δ pozitív számokra (angolul: near-miss Johnson solid). Azaz egy ál-Johnson-poliéder lapjai az (ε, δ)-hibahatárokon belül szabályos sokszögek, de legalább 1 lapja nem szabályos sokszög (ld. [3]). Mivel minden poliéder ál-Johnson-poliéder megfelelően nagy ε és δ számokra, ezért $(ER(P) - 1)$ és $ED(P)$ értékei (ha P jelöli a poliédert) – a 2. fejezetben bevezetett jelölésekkel – adják meg a legkisebb ε és δ értékeket, melyekre a poliéder még ál-Johnson-poliéder.

Nevezzük 1., 2., ill. 3. típusú ál-Johnson-poliédernek az olyan konvex poliédert, melyre az 1., az 1. és 2., ill. az 1., 2. és 3. feltételek teljesülnek (ha a 2, és 3. feltételben úgy számolunk a szögekkel, mintha a poliéder minden lapja szabályos sokszöglap lenne). Az 1. feltétel adott ε és δ pozitív számok esetén teljesül, itt olyan értékekre gondolunk, amelyek esetén a sokszög már látszólag szabályos, de azért a lehető legnagyobb ilyen értékeket szeretnénk választani, hogy legyen egyáltalán a feltételeknek megfelelő poliéder, akár minél több is. Az, hogy az ε és δ pozitív számokra mely értékek a megfelelő választás, még további vizsgálatok tárgya kell, hogy legyen.

Ha a poliédernek csak a háromszöglapjai nem szabályosak, akkor δ-tól eltekinthetünk, mivel egy háromszög oldalhosszai már meghatározzák annak alakját is, így azt is, hogy menyire közeli az alakja egy szabályos háromszöghöz. Ekkor $\varepsilon = 0{,}02$ már jó választásnak tűnik, ld. az 5. fejezet 2. példáját.

Érdekesség, hogy ha egy ál-Johnson poliéder tényleg látszólag szabályos sokszöglapokkal rendelkezik, akkor jó esély van rá, hogy pl. papírmodellt vagy pálcikamodellt (amely megfelelő lapátlókhoz tartozó pálcikák berakásával már merev lesz) tudunk készíteni belőle, mivel a fizikai modellkészítés során fellépő pontatlanságok elfedik a kis illeszkedési pontatlanságokat.

A 3. fejezet utolsó poliéderosztálya példa arra, hogy végtelen sok 1. típusú ál-Johnson-poliéder létezik, míg a 3. típusú ál-Johnson-poliéderekből valószínűleg már csak véges sok van

(megfelelően kis ε és δ pozitív számok esetén, amik azért garantálják, hogy ne üres halmaz legyen ekkor az ál-Johnson-poliéderek családja), mivel Grünbaum és Johnson fentebb említett végességi bizonyítása is a 2. és 3. feltételen alapszik.

Megfelelő műveletek megengedésével persze minden poliéderről eldönthető (akár geometriai módszerekkel is), hogy Johnson-poliéder-e vagy sem – mert pl. egy olyan szabályos sokszöget rajzolva egy tetszőleges lap síkjában, amelynek egyik oldala a poliéder egyik éle, és a sokszög a lap irányában fekszik ugyanannyi csúccsal, mint a lap csúcsainak száma, ellenőrizhető, hogy az a szabályos sokszög megegyezik-e a lappal.

Az ál-Johnson-poliéderek egy-egy típusának sokszor többféle megvalósítása is van, mivel előállíthatók ugyanolyan laphálójú, de alakjukban csak kicsit különböző poliéderek. Van, amikor arra törekednek egy konstrukcióban, hogy minél több szabályos sokszöglapja legyen az ál-Johnson-poliédernek, de van, hogy inkább arra, hogy minden lapja minél közelebbi alakú legyen egy szabályos sokszöghöz, még ha ennek az is az ára, hogy egyik lap sem lesz pontosan szabályos sokszög. Általában minél több szabályos sokszöglapja van egy poliédernek, annál egyszerűbb a modellezése.

Az ál-Johnson-poliéderek nem szabályos sokszöglapjai gyakran a lehető legkisebb oldalszámú lapoknál (háromszöglapok, négyszöglapok esetében) vannak. Ilyenkor a szabályos sokszöglapok és a lapháló szimmetriái (amelyek tipikusan megvalósulnak metrikus szimmetriaként is) alapján sokszor már megszerkeszthető a poliéder. Sokszor azért is van értelme ilyen poliédermodell készítésének, mert így a poliéder felületének a kisebb része lesz nem szabályos, ugyanis ugyanakkora élhossz esetén a szabályos n-szög területe nő, ha n növekszik.

Ál-Johnson-poliéderek számítógépes modellezésekor vigyázni kell, hogy ne automatikusan tekintsük a poliéder bármelyik lapját szabályos sokszögként megszerkeszthetőnek, mert nem megfelelő választás esetén nem záródó poliéderfelületet kapunk.

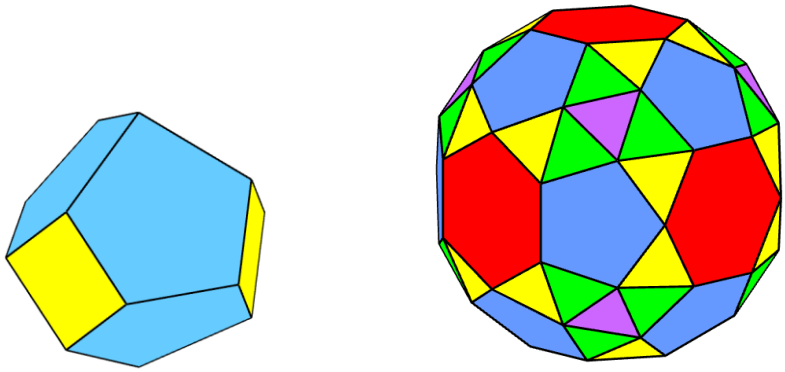
Ál-Johnson-poliédereknek egy gyakori előállítási módja: az arkhimédészi ill. Johnson-poliéderek szerkesztésekor használható szerkesztési módszerek alkalmazása más esetekre: lapok szelése, lapok kifelé eltolása, lapok piszésítése (eltolva forgatása kifelé). Ilyenkor tipikusan már nem mindegyik újonnan keletkezett lap lesz szabályos sokszög, de törekszünk rá hogy minél kevesebb nem szabályos sokszöglap legyen, azért aránylag nem messze eső alakkal a szabályos sokszögtől, vagy minél kisebbek legyenek a keletkező nem szabályos lapok (pl. háromszögek, négyszögek, mivel oldalszámmal nő a terület is). Illetve, annak is van előnye, ha páratlan oldalú sokszög lesz a nem szabályos (pl. ötszög), mert a páros oldalúaknál talán könnyebben észrevehető, ha elromlik valahol a szimmetria, mondjuk a centrálszimmetria, és ezért bizonyos szemközti oldalak nem lesznek párhuzamosak. Szelésre gyakran kiindulópont egy katalán test (ez az arkhimédészi test duálisa), mert annak a csúcsalakzatai szabályosak, így megfelelő szelősíkok esetén szabályos sokszöglapok keletkeznek a szelések helyén, és akkor már csak arra kell ügyelni, hogy a többi keletkező lap közel szabályos sokszög alakú legyen.

5. Példák ál-Johnson-poliéderek számítógépes modellezésére

A következőkben néhány ál-Johnson-poliéder esetében megvizsgáljuk, hogyan lehet elkészíteni a számítógépes modelljüket (az ál-Johnson poliédereknek egy közel sem teljes listája megtalálható a [3]-as hivatkozásban).

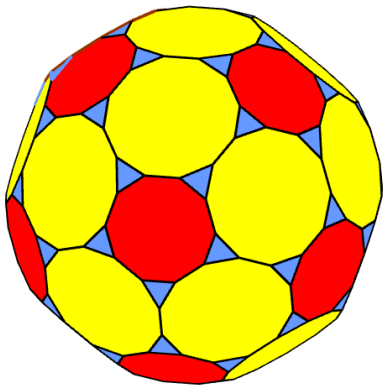
1. példa. Csonkolt kettős gúla – itt két modellezési lehetőség van. Az egyik, ha pontosan négyzetlapokat szerkesztünk, akkor 1 paraméter marad arra, hogy a csonkolt lapok minél jobban hasonlítsanak a szabályos ötszöglapokra. A másik esetben kétparaméteres a probléma: ha csak négyzethez közeli lapokat készítünk, ekkor olyan paraméterértékeket keresünk, hogy a négyszöglapok a négyzethez, az ötszöglapok a szabályos ötszöghöz legyenek a lehető legközelebb (az ötszöglapok nem lehetnek szabályos ötszögek, mert akkor a négyszögek nem

lennének síklapok). Ez a poliéder 2. típusú ál-Johnson-poliéder, mivel a 3. feltétel nem teljesül rá, de az ötszöglapjain könnyen látható, hogy nem szabályosak, csak képzeletben húzzuk be az átlóit, látszik, hogy nem egyformán osztják ketté az ötszöglapot.



3. ábra. Az 1. példa és a 2. példa ál-Johnson-poliéderei

2. példa. Ez a poliéder a pentahexagonális piritoheptakontatetrahedron névre hallgat (Mason Green fedezte fel 2006-ban). A lapháló szimmetriáit szeretnénk metrikus szimmetriaként is előállítani. A 6 db hatszöglap átellenes sokszögpárokat alkot, ezeknek a pároknak közös forgástengelyük van (180 fokos forgásszimmetria miatt). A 3 tengely a szimmetria miatt páronként merőleges kell, hogy legyen egymásra, és 1 ponton kell, hogy menjen át. Emiatt a hatszögek egy kocka lapjain helyezkednek el, a 12 db ötszöglap a kocka 12 éléhez társítható, mert egy ötszöglap két olyan hatszöglapot köt össze, mely közös éllel rendelkező, szomszédos kockaoldalakon helyezkedik el. A hatszöglapok és ötszöglapok megszerkesztése után a háromszöglapok már automatikusan megszerkeszthetők, mivel a hatszöglapok és ötszöglapok lefogják az összes poliédercsúcsot. Adott élhosszú szabályos hatszögek és szabályos ötszögek esetén a kocka élhossza szerkesztendő – valamely két tengely által meghatározott síkot elmetszve a poliéderrel, egy Pitagorasz-tétel írható fel, melyet kifejtve az ismeretlen kockaélhossz egy másodfokú egyenlet gyöke lesz, és így megszerkeszthető lesz. Ez a poliéder 3. típusú ál-Johnson-poliéder, és csupán a háromszöglapjai között vannak nem szabályos sokszöglapjai. Ez egy ál-Johnson-poliéder $\varepsilon = 0{,}018$ hibahatárnál közelebbi szabályos sokszöglapokkal, amelyek mindegyike látszólag szabályos.



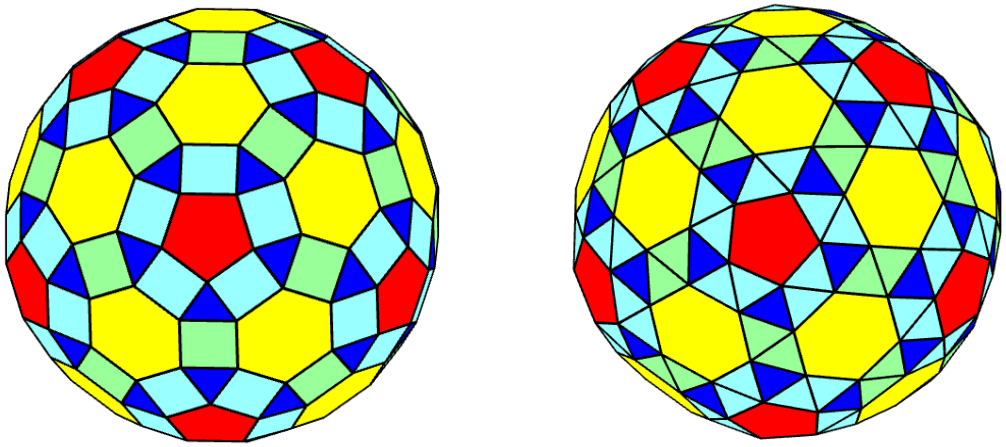
4. ábra. A 3. példa ál-Johnson-poliédere, a csonkolt csonka ikozaéder

3. példa. Csonkolt csonka ikozaéder. A csonka ikozaédert (focilabdát) a csúcsainál egységesen szeljük, de nem tudjuk ugyanúgy szelni az ötszöglapoknál és a hatszöglapoknál: ha mondjuk szabályos 12-szöglapokat szeretnénk kapni a szelések után a hatszöglapokból, akkor az ötszöglapokból keletkező 10-szöglapok és a focilabda csúcsainál keletkező háromszöglapok sem lesznek szabályosak.

4. példa. Kifelé toljuk a csonka ikozaéder (focilabda) lapjait, a lapokra merőleges irányokban, egységes $s > 0$ távolsággal az ötszöglapokat, és egységes $t > 0$ távolsággal a hatszöglapokat. Ez egy kétparaméteres modellel megvalósítható, dinamikus geometriai szoftvert használva. Az eltolt lapokhoz csatlakozó téglalapokat és háromszöglapokat veszünk hozzá, hogy megkapjuk egy poliéder felületét (ld. 5. ábra). Az így adódó poliéder sok esetben konvex lesz, de bizonyos s és t értékekre konkáv poliéder adódik.

A hatszöglapok között elhelyezkedő négyszöglapok négyzetek lesznek t megfelelő választása esetén. Az így keletkezett poliéder úgy is elkészíthető, hogy a focilabdánkkal azonos élhosszú, nagy rombikozidodekaéder nevű arkhimédészi test (amelynek csúcsaiban egy-egy szabályos 10-szög, 6-szög és 4-szög találkozik) mindegyik 10-szöglapjára olyan „sapkát” helyezünk, melyet poliéderünk egy ötszöglapja a vele határos téglalapokkal és háromszöglapokkal együtt alkot (ekkor a „sapka” alakja már csak az s paramétertől függ). Ha most s értékét úgy választjuk, hogy a hatszöglapokat az ötszöglapokkal összekötő négyszöglapok is négyzetek legyenek, a poliéder már nem lesz konvex (pedig ekkor még a háromszöglapok is szabályos sokszögek lesznek).

Olyan konvex poliédert, amely ál-Johnson-poliéder, úgy kaphatunk, hogy beállítjuk t értékét arra a t_0 számra (vagy annak a közelébe), melyre a hatszöglapok közötti négyszöglapok négyzetek lesznek, ezután s értékét pedig úgy állítjuk be, hogy a poliéder még épp konvex maradjon (de s kismértékű növelésével már átváltson konkávba a poliéder alakja). Szerencsére ebben az esetben az ötszöglappal határos négyszöglapok és a háromszöglapok alakja is elég közeli a négyzethez, ill. szabályos háromszöghöz. Ez az ál-Johnson-poliéder nem 2. típusú, mivel van olyan csúcsa, amelyben a szögösszeg $360°$ lenne, ha úgy számolunk az esetében, mintha minden lapja szabályos sokszöglap lenne.



5. ábra. A 4. példa és 5. példa ál-Johnson-poliéderei

5. példa. Piszésítjük a csonka ikozaéder (focilabda) lapjait (kifelé toljuk azokat és egyben forgatjuk is őket a lapközéppontok és a testközéppont egyenesei, mint tengelyek körül, egységesen az ötszöglapokat és egységesen a hatszöglapokat is, és ezekhez a lapokhoz csatlakozó háromszöglapokat veszünk hozzá, hogy megkapjuk egy poliéder felületét (ld. 5. ábra). Az így adódó poliéder sok esetben konvex lesz, de bizonyos eltolásokra és

forgatásokra konkáv poliéder adódik. A pisze dodekaéder 1-paraméteres poliédermodelljéhez hasonlóan (ld. [5]) adott forgatási szögre megszerkeszthető, hogy a hatszöglapok hogyan legyenek eltolva, hogy közöttük egyenlő szárú háromszöglapok keletkezzenek (azaz, azok a háromszöglapok legyenek egyenlő szárúak, melyek csúcsait lefogják a hatszöglapok), majd beállítható úgy a forgatási szögük, hogy ezek a háromszöglapok szabályos háromszögek elég jó közelítései legyenek. Ezt követően be lehet úgy állítani az ötszögek eltolásait és forgatásait, hogy a velük szomszédos, újonnan keletkező háromszöglapok alakja aránylag közel legyen a szabályos háromszöghöz, és még közben fennmaradjon a poliéder konvexitása is. Hasonlóan az előző példához, itt is a konvexitás feltétele miatt áll fenn az, hogy az ötszöglapokkal szomszédos háromszöglapok alakja nem lehet akármilyen közel egy szabályos háromszöghöz.

Ez az ál-Johnson-poliéder nem 2. típusú, mivel van olyan csúcsa, amelyben a szögösszeg 360° lenne, ha úgy számolunk az esetében, mintha minden lapja szabályos sokszöglap lenne.

6. Összefoglaló

Nincs még szisztematikusan feltérképezve az ál-Johnson-poliéderek családja. Többféle módszerrel lehet előállítani ilyen poliédereket, és ha elég nagyfokú a szimmetriája egy ilyen poliédernek, valamint elég sok szabályos sokszöglapja van, akkor az vagy szerkeszthető, vagy paraméteres poliédermodell felhasználásával elkészíthető a tetszőleges pontosságú közelítése.

Köszönetnyilvánítás.

Szeretném megköszönni Németh Lászlónak és Szalay Lászlónak, hogy erről a témakörről előadhattam Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2021-es programjában.

Irodalomjegyzék

[1] **Grünbaum, B., Johnson, N. W.**, The faces of a regular-faced polyhedron, J. of London Math. Soc. **40** (1965) 577-586. doi:10.1112/jlms/s1-40.1.577

[2] **Johnson, N. W.**, Convex Solids with Regular Faces, Canadian Journal of Mathematics. **18** (1966) 169–200. doi:10.4153/cjm-1966-021-8

[3] Near-miss Johnson solid, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Near-miss_Johnson_solid

[4] **Talata, I.**, Gömbközelítések poliéderrel, Dimenziók IV (2016) 13-21. doi:10.20312/dim.2016.02

[5] **Talata, I.**, Nemszerkeszthető Johnson-poliéderek számítógépes modellezése dinamikus geometriai módszerekkel, Dimenziók VIII (2020) 15-24. doi:10.20312/dim.2020.02

[6] **Zalgaller, V. A.**, "Convex Polyhedra with Regular Faces". Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova (in Russian). **2** (1967), 1–221.

doi:10.20312/dim.2021.02

Az általánosított hiperbolikus oktonióalgebrákról

Péntek Kálmán
ELTE SEK TTMK
Savaria Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban általánosítjuk Macfarlane M klasszikus hiperbolikus kvaternióit és megkonstruáljuk az általánosított hiperbolikus kvaternióinak $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ struktúráját. Az általánosított Cayley-Dickson eljárás felhasználásával e struktúrából megalkotjuk az általánosított hiperbolikus oktoniók $\mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma}$ nem kommutatív és nem asszociatív algebráját. Az utolsó fejezetben megkonstruáljuk az általánosított hiperbolikus oktoniók vektor-mátrix reprezentációját.

ABSTRACT. In the paper we generalize Macfarlane's classical hyperbolic quaterninons M, and we construct the structure of generalized hyperbolic quaternions $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$. Based of the generalized Cayley-Dickson process of this structure we yield the non-commutative and non-associative algebras of generalized hyperbolic octonions $\mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma}$. In the last section we construct the vector-matrix representation of generalized hyperbolic octonions.

1. Bevezetés

Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ír matematikus, fizikus és csillagász a komplex számok struktúrájának általánosításaként alkotta meg a kvaterniókat. A kvaterniók képzetes egységei közötti, áttörést jelentő

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

összefüggést 1843. október 16-án ismerte fel. Dublinban az Ír Tudományos Akadémia ülésére tartott gyalogosan, ahol aznap éppen ő elnökölt. A Királyi Csatorna hidjához érve naplója bejegyzése szerint villámcsapásként érte a felismerés. A pillanat hevületében zsebkésével a híd korlátjába véste a felfedezett összefüggést, amely egyértelműen a probléma megoldását jelentette. Hamilton ezután teljes hátralevő életét a kvaterniók elmélete minél teljesebb kidolgozásának szentelte. (*HAMILTON*, 1844,1847)

Nem sokkal Hamilton felfedezése után John Thomas Graves (1806 – 1870) ír, majd Arthur Cayley (1821 – 1895) angol jogász és matematikus egymástól függetlenül megalkották az oktoniók struktúráját. A XIX. század második felében jónéhány más, a számfogalom általánosításaként felépített rendszer is napvilágot látott. Ezek egyike volt az Alexander Macfarlane (1851 – 1913) skót származású amerikai matematikus és fizikus által 1891-ben megalkotott hiperbolikus kvaterniók algebrája. Ezeket a matematikai struktúrákat egészen a XX. század harmincas éveinek végéig hiperkomplex rendszereknek nevezték utalva arra, hogy a komplex számok általánosításaiként alakultak ki. Manapság ezekre a struktúrákra inkább a

(test feletti) algebrák elnevezést használják. (*CAYLEY*, 1889), (*MACFARLANE*, 1900), (*KANTOR – SZOLODOVNYIKOV*, 1985), (*ROSENFELD*, 1997).

Ebben a dolgozatban először általánosítjuk az általánosított kvaternióalgebrák mintájára Macfarlane hiperbolikus kvaternióit és áttekintjük e struktúrák legfontosabb tulajdonságait. A témát magyar nyelven részletesen tárgyalja pl. *PÉNTEK* (2020) dolgozata. Ezután az általánosított hiperbolikus kvaterniók struktúrájának Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárásával építjük fel az általánosított hiperbolikus oktoniók algebráját. Ez az algebra nem kommutatív és nem is asszociatív, de reprezentálható alkalmas Zorn-féle vektor-mátrixok segítségével. Ezen reprezentációs tétel bizonyítása jelenti dolgozatunk fő eredményét.

2. Az általánosított komplex számok és az általánosított hiperbolikus kvaterniók

Ebben a fejezetben összefoglaljuk azokat a legfontosabb előzetes ismereteket, amelyek feltétlenül szükségesek a dolgozat fő részét képező általánosított hiperbolikus oktoniók tárgyalásához.

Jelölje $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ a valós számok testét a 0 összeadási és 1 szorzási neutrális elemmel. Ekkor a

$$\mathbb{C}_\gamma := \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R},\ i \notin \mathbb{R}\} \tag{1}$$

alakú kifejezéseket az *általánosított komplex számok* halmazának nevezzük akkor és csakis akkor, ha az $\{1, i\}$ *komplex egységek* eleget tesznek az alábbi szorzási szabályoknak:

$$1 \cdot 1 = 1,\ \ 1 \cdot i = i \cdot 1 = i,\ \ i^2 = -\gamma, \tag{2}$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges rögzített valós paraméter.

A $\mathbb{C}_\gamma$ halmazban egy *skalárral való szorzás*, *összeadás*, valamint a (2) alapján az algebrák szokásos konstruálási szabályai szerint még egy *szorzás* művelet is értelmezhető az alábbi módon. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}, a + b \cdot i, a' + b' \cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ esetén legyen

$$r \cdot (a + b \cdot i) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i \quad \text{a skalárral való szorzás,} \tag{3}$$

$$(a + b \cdot i) + (a' + b' \cdot i) := (a + a') + (b + b') \cdot i \quad \text{az összeadás,} \tag{4}$$

$$(a + b \cdot i) \cdot (a' + b' \cdot i) := (a \cdot a' - \gamma \cdot b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b) \cdot i \quad \text{a szorzás.} \tag{5}$$

1. Tétel. Az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\gamma$ halmaza a (3), (4) és (5) műveletekkel egy 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Megjegyezzük, hogy a $\mathbb{C}_\gamma$ a $\gamma = 1$ esetben a klasszikus Gauss-féle komplex számok $\mathbb{C}$ algebráját állítja elő.

A $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ elem *konjugált*ján a $\bar{z} := a - b \cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ általánosított komplex számot értjük.

A $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ általánosított komplex szám *normá*jának a

$$N(z) := z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = a^2 + \gamma \cdot b^2 \in \mathbb{R}$$

valós számot nevezzük.

A $z = a + b \cdot i, z' = a' + b' \cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ elempár *skaláris szorzat*án a

$$\langle z, z' \rangle := a \cdot a' + \gamma \cdot b \cdot b' \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

Jelölje ezután $M_2(\mathbb{R})$ a valós test feletti másodrendű négyzetes mátrixok 4-dimenziós teljes mátrixalgebráját. Az

(6) $$M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\gamma \cdot b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

alakú mátrixok halmaza a szokásos mátrixműveletekkel az $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrában egy részalgebrát alkot.

2. Tétel. Az $f: \mathbb{C}_\gamma \to M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), a + b \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\gamma \cdot b & a \end{pmatrix}$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, így $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}_\gamma$ struktúra mátrixreprezentációja.

Az általánosított komplex számok részletes tárgyalása megtalálható magyarul pl. *PÉNTEK* (2018) dolgozatában.

Az

(7) $$\mathbb{M}_{\alpha\beta} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i, j, k \notin \mathbb{R}\}$$

alakú kifejezéseket az *általánosított hiperbolikus kvaterniók* halmazának nevezzük akkor és csakis akkor, ha az $\{1, i, j, k\}$ *általánosított kvaternió-egységek* között teljesülnek a következő szorzási összefüggések:

(8) $$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k$$

$$i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta, \quad k^2 = \alpha \cdot \beta$$
$$i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = \beta \cdot i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = \alpha \cdot j,$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített valós számok.

Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ halmazban a *skalárral való szorzás*, az *összeadás*, valamint a (8) alapján az algebrák szokásos konstruálási szabályai szerint még a *szorzás* művelet értelmezhető az alábbi módon. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, $a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ esetén legyen

(9) $$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k$$

a skalárral való szorzás,

(10) $$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ := (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k$$

az összeadás,

(11) $$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ := (a \cdot a' + \alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + \\ + (a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot i + \\ + (a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot j + \\ + (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k$$

a szorzás.

3. Tétel. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ halmaza a rajta értelmezett (9), (10) és (11) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Ebben a struktúrában $0_{\mathbb{M}} := 0 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ az összeadás neutrális eleme és egyben a szorzás zéruseleme is, $1_{\mathbb{M}} := 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ pedig a szorzás neutrális eleme.

Megmutatható, hogy az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ egy olyan kvadratikus algebra, amelyik nem alternáló. Megjegyezzük továbbá, hogy az $\alpha = \beta = 1$ esetben az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ struktúra speciálisan a Macfarlane-féle klasszikus hiperbolikus kvaterniók algebrája lesz.

A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ *konjugált*ján a

(12) $\bar{q} := a - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$

elemet értjük.

A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ *normá*jának a

(13) $N(q) := q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a^2 - \alpha \cdot b^2 - \beta \cdot c^2 - \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \in \mathbb{R}$

valós számot nevezzük.

Ha $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor e két elem *skaláris szorzat*án a

(14) $\langle q, q' \rangle := a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$

valós számot értjük.

A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ *valós rész*ének (skalár rész) a

(15) $S(q) := a \in \mathbb{R}$

valós számot, *képzetes rész*ének (vektor rész) a

(16) $V(q) := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{R}^3$

vektort nevezzük. Az

(17) $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) := \{0 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{M}_{\alpha\beta}$

alakú általánosított hiperbolikus kvaterniókat pedig *tiszta képzetes kvaterniók*nak hívjuk.
Ha $q = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$, akkor

(18) $q \cdot q' = -[-\alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d'] + [(c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k]$

Az első szögletes zárójelben szereplő mennyiséget $q \circ q'$ jelöli és e két elem *skaláris szorzat*ának, a második szögletes zárójelben szereplő mennyiséget $q \times q'$ jelöli és e két elem *vektoriális szorzat*ának nevezzük. Ekkor tehát a $q \cdot q' = -q \circ q' + q \times q'$ összefüggés teljesül.

A

(19) $Z(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{11}, A_{22} \in \mathbb{R}, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

alakú hipermátrixok halmazát *valós Zorn-féle vektor-mátrixok*nak nevezzük.

4. Tétel. A $Z(\mathbb{R})$ halmaz egy 8-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Jelölje $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ azon speciális valós Zorn-féle vektor-mátrixok halmazát, amelyre teljesülnek az

(20) $A_{11} = A_{22} := a \in \mathbb{R}, A_{12} = -A_{21} := (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$

feltételek.

5. Tétel. A $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ halmaz egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív részalgebrát alkot a $Z(\mathbb{R})$ algebrában. Az

$$F: \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R}),\ a + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k \mapsto \begin{pmatrix} a & (b,c,d) \\ -(b,c,d) & a \end{pmatrix} \tag{21}$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, így $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ struktúra vektor-mátrix reprezentációja.

Az általánosított hiperbolikus kvaterniók részletes tárgyalása magyarul megtalálható pl. *PÉNTEK* (2020) dolgozatában.

3. Az általánosított hiperbolikus oktoniók

Az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algebrájából kiindulva az általánosított Cayley-Dickson-féle eljárással származtatjuk az általánosított hiperbolikus oktoniókat.

Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta} := \{(q_0, q_1): q_0, q_1 \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}\}$ direktszorzatban értelmezzünk műveleteket a következő módon

(22) skalárral való szorzás: $r \cdot (q_0, q_1) := (r\cdot q_0, r\cdot q_1)$,

(23) összeadás: $(p_0, p_1) + (q_0, q_1) := (p_0 + q_0, p_1 + q_1)$,

(24) szorzás: $(p_0, p_1)\cdot(q_0, q_1) := (p_0\cdot q_0 - \gamma\cdot\overline{q_1}\cdot p_1, p_1\cdot\overline{q_0} + q_1\cdot p_0)$,

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter, $r \in \mathbb{R}, (p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta}$.

6. Tétel. Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ direktszorzat a (22), (23) és (24) műveletekkel egy 8-dimenziós, nem kommutatív és nem is asszociatív, de neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett.

E struktúrában $0_{\mathbb{O}} := (0_{\mathbb{M}}, 0_{\mathbb{M}})$ az összeadás, $1_{\mathbb{O}} := (1_{\mathbb{M}}, 0_{\mathbb{M}})$ a szorzás neutrális eleme, továbbá mint 8-dimenziós vektortérben természetes bázist alkot az alábbi elemrendszer: $1_{\mathbb{O}}, (i, 0_{\mathbb{M}}), (j, 0_{\mathbb{M}}), (k, 0_{\mathbb{M}}), E := (0_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}}), (0_{\mathbb{M}}, i), (0_{\mathbb{M}}, j), (0_{\mathbb{M}}, k)$.

7. Tétel. Az $U := \{(q_0, 0_{\mathbb{M}}): q_0 \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ részalgebrát alkot az előző tételben szereplő

$$f_{\mathbb{O}}: \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to U, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{M}})$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, s ezért az

$$f_{\mathbb{O}}^{*}: \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to \mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta}, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{M}})$$

egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

Definíció. A beágyazás eredményeként kapott struktúrát $\mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított hiperbolikus oktoniók* algebrájának nevezzük.

8. Tétel. Az $E = (0_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}}) \in \mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma}$ elemre teljesülnek a következők:

(a) $E^2 = -\gamma$,

(b) bármely $q_1 \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemre $(0_{\mathbb{M}}, q_1) = q_1 \cdot E$,

(c) minden $(q_0, q_1) \in \mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma}$ elem előállítható $q_0 + q_1 \cdot E$ alakban.

A (c) pontban szereplő előállítást az általánosított hiperbolikus oktonió *kvaternió-algebrai* alakjának nevezzük. Az ezen alakkal történő számolás szabályait mutatja a következő

9. Tétel. Ha $r \in \mathbb{R}, p_0 + p_1 \cdot E, q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^H$, akkor

(a) skalárral való szorzás: $r \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (r \cdot q_0) + (r \cdot q_1) \cdot E$,

(b) összeadás: $(p_0 + p_1 \cdot E) + (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) \cdot E$,

(c) szorzás: $(p_0 + p_1 \cdot E) \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) =$

$$= (p_0 \cdot q_0 - \gamma \cdot \overline{q_1} \cdot p_1) + (p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0) \cdot E.$$

Speciálisan a $p_0 := 0_{\mathbb{M}}$, $p_1 := 1_{\mathbb{M}}$, $q_0 := q$, $q_1 := 0_{\mathbb{M}}$ értékadással az előző tétel (c) része alapján érvényes a

10. Következmény. Bármely $q \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemre érvényes: $E \cdot q = \bar{q} \cdot E$.

Megjegyzés. Ha q értéke i, j vagy k, akkor a fenti következmény alapján

$$E \cdot i = -i \cdot E, E \cdot j = -j \cdot E, E \cdot k = -k \cdot E.$$

Egyszerű direkt számolással igazolható a következő

11. Lemma.

(a) Ha $f \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^H$, akkor $(f \cdot i) \cdot E = f \cdot (i \cdot E)$,

(b) ha $g \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^H$, akkor $(g \cdot j) \cdot E = g \cdot (j \cdot E)$,

(c) ha $h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^H$, akkor $(h \cdot k) \cdot E = h \cdot (k \cdot E)$.

A 8. Tétel és a 11. Lemma alapján közvetlenül adódik a

12. Tétel. Ha $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k, q_1 = a_4 + a_5 \cdot i + a_6 \cdot j + a_7 \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ akkor a

$$o := q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^H$$

általánosított hiperbolikus oktonió felírható

$$o = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k + a_4 \cdot E + a_5 \cdot (i \cdot E) + a_6 \cdot (j \cdot E) + a_7 \cdot (k \cdot E)$$

alakban.

Legyen a továbbiakban

$$e_0 := 1, e_1 := i, e_2 := j, e_3 := k, e_4 := E, e_5 := i \cdot E, e_6 := j \cdot E, e_7 := k \cdot E,$$

amellyel az általánosított hiperbolikus oktoniók fenti előállítása lényegesen tömörebb és könnyebben kezelhető

$$o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i \tag{25}$$

alakban állíthatók elő. A (25) alakot az $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^H$ oktonió valós-algebrai alakjának nevezzük, az $\{e_i\}_{i=0}^7$ elemeket általánosított hiperbolikus oktonióegységeknek nevezzük.

A 11. Lemma folytatásaként egyszerű direkt számítással igazolható, hogy az általánosított hiperbolikus oktoniók körében is érvényesek (*EBBINGHAUS ET AL*, 1991) mintájára az alábbi összefüggések:

13. Tétel. Tetszőleges $u, v \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ és az $e_4 = E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^H$ esetén:

(a) $(u + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4) \cdot (v + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4) = u \cdot v + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4 = u \cdot v$,

(b) $(u + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4) \cdot (0_{\mathbb{M}} + v \cdot e_4) = u \cdot (v \cdot e_4) = (v \cdot u) \cdot e_4$,
(c) $(0_{\mathbb{M}} + u \cdot e_4) \cdot (v + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot v = (u \cdot \bar{v}) \cdot e_4$,
(d) $(0_{\mathbb{M}} + u \cdot e_4) \cdot (0_{\mathbb{M}} + v \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot (v \cdot e_4) = e_4^2 \cdot (\bar{v} \cdot u)$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az (a) rész szerint az olyan általánosított hiperbolikus oktoniókkal, amelyek „képzetes része” 0, úgy számolhatunk, mint az általánosított hiperbolikus kvaterniókkal.

14. Tétel. Az általánosított hiperbolikus oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblájának belső tartománya:

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	αe_0	e_3	$-\alpha e_2$	e_5	αe_4	$-e_7$	αe_6
e_2	$-e_3$	βe_0	βe_1	e_6	e_7	βe_4	$-\beta e_5$
e_3	αe_2	$-\beta e_1$	$\alpha\beta e_0$	e_7	$-\alpha e_6$	βe_5	$\alpha\beta e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-\gamma e_0$	γe_1	γe_2	γe_3
e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	αe_6	$-\gamma e_1$	$\gamma\alpha e_0$	$-\gamma e_3$	$\gamma\alpha e_2$
e_6	e_7	$-\beta e_4$	$-\beta e_5$	$-\gamma e_2$	γe_3	$\gamma\beta e_0$	$-\gamma\beta e_1$
e_7	$-\alpha e_6$	βe_5	$-\alpha\beta e_4$	$-\gamma e_3$	$-\gamma\alpha e_2$	$\gamma\beta e_1$	$\gamma\alpha\beta e_0$

Bizonyítás. A 13. tétel (a) része szerint a műveleti táblázat bal felső 4×4–es parcellája azonos az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ általánosított hiperbolikus kvaterniók egységeinek szorzótáblájával. A 13. tétel (b) részének felhasználásával egyszerű közvetlen számítással igazolhatjuk a műveleti táblázat jobb felső 4×4–es parcellájának helyességét. Ezután a 13. tétel (c) részét alkalmazva igazolhatjuk a műveleti táblázat bal alsó 4×4–es parcella kitöltésének helyességét. Végül pedig a műveleti táblázat jobb alsó 4×4–es parcellájának helyessége a 13. tétel (d) része alapján látható be. □

Hosszadalmas, bár nem nehéz számításokkal a 14. tétel, valamint a szorzás összeadásra való disztributív tulajdonságát felhasználva adódik a következő

15. Tétel. Legyen $r \in \mathbb{R}, a = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i , b = \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^{H}$, akkor érvényesek a következő számolási szabályok:

(a) skalárral való szorzás:

$$r \cdot (\sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i) = \sum_{i=0}^{7} (r \cdot a_i) \cdot e_i ,$$

(b) összeadás:

$$a + b = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i + \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i = \sum_{i=0}^{7} (a_i + b_i) \cdot e_i ,$$

(c) szorzás:

$$a \cdot b = \left(\sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{7} b_j \cdot e_j\right) = \sum_{i,j=0}^{7} (a_i \cdot b_j) \cdot (e_i \cdot e_j) =$$

$$\begin{aligned}
&= (a_0b_0 + \alpha a_1b_1 + \beta a_2b_2 + \alpha\beta a_3b_3 - \gamma a_4b_4 + \gamma\alpha a_5b_5 + \gamma\beta a_6b_6 + \gamma\alpha\beta a_7b_7) \cdot e_0 + \\
&+ (a_0b_1 + a_1b_0 + \beta a_2b_3 - \beta a_3b_2 + \gamma a_4b_5 - \gamma a_5b_4 - \gamma\beta a_6b_7 + \gamma\beta a_7b_6) \cdot e_1 + \\
&+ (a_0b_2 - \alpha a_1b_3 + a_2b_0 + \alpha a_3b_1 + \gamma a_4b_6 + \gamma\alpha a_5b_7 - \gamma a_6b_4 - \gamma\alpha a_7b_5) \cdot e_2 + \\
&+ (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0 + \gamma a_4b_7 - \gamma a_5b_6 + \gamma a_6b_5 - \gamma a_7b_4) \cdot e_3 + \\
&+ (a_0b_4 + \alpha a_1b_5 + \beta a_2b_6 + \alpha\beta a_3b_7 + a_4b_0 - \alpha a_5b_1 - \beta a_6b_2 - \alpha\beta a_7b_3) \cdot e_4 + \\
&+ (a_0b_5 + a_1b_4 - \beta a_2b_7 + \beta a_3b_6 - a_4b_1 + a_5b_0 - \beta a_6b_3 + \beta a_7b_2) \cdot e_5 + \\
&+ (a_0b_6 + \alpha a_1b_7 + a_2b_4 - \alpha a_3b_5 - a_4b_2 + \alpha a_5b_3 + a_6b_0 - \alpha a_7b_0) \cdot e_6 + \\
&+ (a_0b_7 - a_1b_6 + a_2b_5 + a_3b_4 - a_4b_3 - a_5b_2 + a_6b_1 + a_7b_0) \cdot e_7
\end{aligned}$$

Definíció. Az $o = q_0 + q_1 \cdot e_4 \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ konjugáltján az $\bar{o} := \overline{q_0} - q_1 \cdot e_4 \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított hiperbolikus oktoniót értjük. Ha $q_0 = \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot e_i$ és $q_1 = \sum_{i=0}^{3} a_{i+4} \cdot e_i \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor egyszerűen látható, hogy $\bar{o} = a_0 \cdot e_0 - \sum_{i=1}^{7} a_i \cdot e_i$.

A konjugált képzésére érvényesek az alábbi összefüggések:

16. Tétel. Ha $r \in \mathbb{R}$ és $o, o' \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek, akkor

(a) $\bar{\bar{o}} = o$ involutív,
(b) $\overline{r \cdot o} = r \cdot \bar{o}$ homogén,
(c) $\overline{o + o'} = \bar{o} + \overline{o'}$ additív,
(d) $\overline{o \cdot o'} = \overline{o'} \cdot \bar{o}$ anti-multiplikatív.

17. Tétel. Ha $o = q_0 + q_1 \cdot e_4 \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, $q_0 = \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot e_i$, $q_1 = \sum_{i=0}^{3} a_{i+4} \cdot e_i \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor teljesül az $o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o = a_0^2 - \alpha \cdot a_1^2 - \beta \cdot a_2^2 - \alpha \cdot \beta \cdot a_3^2 + \gamma \cdot a_4^2 - \alpha\gamma \cdot a_5^2 - \beta\gamma \cdot a_6^2 - \alpha\beta\gamma \cdot a_7^2 \in \mathbb{R}$.

Definíció:

Definíció. Az $o \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított hiperbolikus oktonió *normá*ján a 17. tételben szereplő

$$N(o) := o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

18. Tétel. Az általánosított hiperbolikus oktoniók normája rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(a) Tetszőleges $o \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ esetén teljesül $N(o) = N(\bar{o})$,
(b) Ha $o, o' \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor általában $N(o \cdot o') \neq N(o) \cdot N(o')$.

Megjegyzés. A 18. tétel (b) pontját egyszerűen beláthatjuk, hiszen $N(e_1 \cdot e_2) = N(e_3) = -\alpha\beta$, másrészt $N(e_1) = -\alpha$ és $N(e_2) = -\beta$, így $N(e_1) \cdot N(e_2) = (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha\beta$, tehát valóban $N(e_1 \cdot e_2) \neq N(e_1) \cdot N(e_2)$.

Definíció. Ha $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i$ és $o' = \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor e két általánosított hiperbolikus oktonió skaláris szorzatán az

$\langle o, o' \rangle := a_o b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha\beta a_3 b_3 + \gamma a_4 b_4 - \alpha\gamma a_5 b_5 - \beta\gamma a_6 b_6 - \alpha\beta\gamma a_7 b_7 \in \mathbb{R}$

valós számot értjük.

Egyszerű direkt számolással láthatjuk be a következő állítást:

19. Tétel. A $\mathcal{B}: \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma} \to \mathbb{R}, (o, o') \mapsto \langle o, o' \rangle$ egy szimmetrikus, bilineáris leképezés: tetszőleges $r \in \mathbb{R}, o, o', o'' \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ esetén

(a) $\langle o, o' \rangle = \langle o', o \rangle$ kommutatív,
(b) $\langle r \cdot o, o' \rangle = \langle o, r \cdot o' \rangle = r \cdot \langle o, o' \rangle$ homogén,
(c) $\langle o + o', o'' \rangle = \langle o, o'' \rangle + \langle o', o'' \rangle$ jobbról disztributív az összeadásra nézve,
(d) $\langle o, o' + o'' \rangle = \langle o, o' \rangle + \langle o, o'' \rangle$ balról disztributív az összeadásra nézve.

Vegyük észre, hogy ha $o \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $N(o) = \langle o, o \rangle$, tehát az általánosított hiperbolikus oktoniók normája a skaláris szorzatból származtatható.

4. Az általánosított hiperbolikus oktoniók vektor-mátrix reprezentációja

A $\gamma \in \mathbb{R}$ valós paraméter segítségével konstruáljuk meg a 2. fejezetben látott módon az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\gamma$ algebráját, s vegyük a $\mathbb{C}_\gamma$ elemeiből felépülő

$$Z(\mathbb{C}_\gamma) := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{11}, A_{22} \in \mathbb{C}_\gamma, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{C}_\gamma^3 \right\}$$

alakú hipermátrixok halmazát! Értelmezzünk ezután ezen hipermátrixok halmazában egy skalárral való szorzást és egy összeadást a következő módon! Ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in Z(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor

$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix}$ a skalárral történő szorzást,

$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$ az összeadást értelmezi.

20. Tétel. A $Z(\mathbb{C}_\gamma)$ halmaz a rajta értelmezett skalárral való szorzás és összeadás műveletekkel egy 16-dimenziós vektorteret alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Tekintsük most a $Z(\mathbb{C}_\gamma)$ elemei közül azon különleges alakú hipermátrixokat, amelyekre teljesül, hogy $A_{22} \in \mathbb{C}_\gamma$ az $A_{11} \in \mathbb{C}_\gamma$ konjugáltja, $A_{12} \in \mathbb{C}_\gamma^3$ komponensei az $A_{21} \in \mathbb{C}_\gamma^3$ komponenseinek negatív konjugáltjai. Ezek halmazát jelölje a továbbiakban $Z_*(\mathbb{C}_\gamma)$!

21. Tétel. A $Z_*(\mathbb{C}_\gamma)$ halmaz a skalárral való szorzás és összeadás műveletével egy 8-dimenziós alteret alkot $Z(\mathbb{C}_\gamma)$ vektortérben.

Ezt a struktúrát algebrává fejleszthetjük, ha elemei között értelmezünk egy $*$ szorzás műveletet a következő módon:

$$A * B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \\ := \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} - A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy a $*$ szorzás emlékeztet a mátrixok klasszikus szorzására, de itt a $\circ$ és $\times$ műveleteket a következőképpen értelmezzük:

Ha $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}_\gamma^3$, akkor legyen

$$U \circ V := -\alpha \cdot u_1 \cdot v_1 - \beta \cdot u_2 \cdot v_2 - \alpha \cdot \beta \cdot u_3 \cdot v_3 \in \mathbb{C}_\gamma,$$

$$U \times V := \left((u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2) \cdot \beta, (u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3) \cdot \alpha, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \right) \in \mathbb{C}_\gamma^3.$$

E skaláris és vektoriális szorzásnak nevezhető művelet teljesen analóg az $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ struktúra 2. fejezet (18) formulájával értelmezett skaláris és vektoriális szorzatával.

22. Tétel. A $Z_*(\mathbb{C}_\gamma)$ vektortér a $*$ szorzási művelettel egy 8-dimenziós nem kommutatív és nem asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Ezt a struktúrát *általánosított komplex hiperbolikus Zorn-féle vektor-mátrixok* algebrájának nevezzük, kiterjesztve *ZORN* (1933) eredményeit.

Tekintsük *KARATAS – HALICI* (2018) dolgozatában bemutatott mintájára az

$$F\colon \mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma} \to Z_{*}(\mathbb{C}_{\gamma}),$$

$$\sum_{j=0}^{7} a_i\, e_i \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_4 i & (-a_1 + a_5 i, -a_2 + a_6 i, -a_3 + a_7 i) \\ (a_1 + a_5 i, a_2 + a_6 i, a_3 + a_7 i) & a_0 - a_4 i \end{pmatrix}$$

leképezést! Az F egy bijektív leképezés, hiszen F^{-1} is leképezés. Hosszadalmas direkt számítással igazolható, hogy F egy művelettartó leképezés is, mivel érvényesek az alábbi összefüggések: tetszőleges $r \in \mathbb{R}, o, o_1, o_2 \in \mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma}$ esetén

(a) homogén: $F(r \cdot o) = r \cdot F(o)$,
(b) additív: $F(o_1 + o_2) = F(o_1) + F(o_2)$,
(c) multiplikatív: $F(o_1 \cdot o_2) = F(o_1) * F(o_2)$.

Ezért érvényes a dolgozat fő eredményét összegző

23. Tétel. Az $F\colon \mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma} \to Z_{*}(\mathbb{C}_{\gamma})$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, így az általánosított komplex hiperbolikus Zorn-féle vektor-mátrixok algebrája az általánosított hiperbolikus oktoniók algebrájának egy reprezentációja.

Irodalomjegyzék

[1] **Cayley, A**. (1889): On Jacobi's elliptic function, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions. The collected Mathematical Papers of Arthur Cayley 1: 127.
[2] **Ebbinghause, H.D. Hermes, H. Hirzebruch, F. Koecher, M. Mainzer, M. Mainzer, K. Neukirch, J. Prestel, A. Remmert, R.** (1991): Numbers. Springer.
[3] **Hamilton, W. R,** (1844): On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 2, 424-434.
[4] **Hamilton, W. R.** (1847): On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 3, 1-16.
[5] **Kántor, I. L., Szolodovnyikov, A. Sz.** (1985): Hiperkomplex számok. Gondolat, Budapest, 1985.
[6] **Karatas, A. Halici, S.** (2018): Vector matrix representation of octonions and their geometry. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 67(1): 161-167. doi:10.1501/Commua1_0000000839
[7] **Macfarlane, A.** (2018): Hyperbolic Quaternions. Proceedings of the Royal Society at Edinburgh. vol. 23. 169 – 180 +figures plate. doi:10.1017/S0370164600010385
[8] **Péntek, K.,** (2018): Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók. Matematikai Közlemények. VI. 25-30. doi:10.20312/dim.2018.03
[9] **Péntek, K.,** (2020): Az általánosított hiperbolikus kvaternióalgebrákról. Dimenziók. Matematikai Közlemények. VIII. 25-33. doi:10.20312/dim.2020.03
[10] **Rosenfeld, B.** (1997): Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publisher, Netherlands. doi:10.1007/978-1-4757-5325-7
[11] **Zorn, M. A.,** (1933): Alternativkörper und quadratische systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg. 395-402.

doi:10.20312/dim.2021.03

Az erdei szalonka (*Scolopax rusticola* L.) Magyarországi tavaszi vonulásának modellezése nemlineáris regressziós eljárások segítségével

Bende Attila
Soproni Egyetem
Vadgazdálkodási és Vadbiológiai Intézet
bende.attila@uni-sopron.hu

Csanády Viktória
Soproni Egyetem
Informatikai és Matematikai Intézet
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

†Csanády Etele
Soproni Egyetem

László Richárd
Soproni Egyetem
Vadgazdálkodási és Vadbiológiai Intézet
laszlo.richard@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Az erdei szalonka (*Scolopax rusticola* L.) tavaszi vonulásának elemzése során a vonulás dinamikai jellegzetességeinek modellezéséhez olyan speciális függvényeket adaptáltunk és illesztettünk, amelyek alkalmasak a folyamat jellemzésére, az eltéréseinek kifejezésére és azok matematikai módszerekkel történő értékelésére. Eredményeink alapján az alkalmazott módszerek közül a Gauss-függvények speciális lineáris kombinációi bizonyultak a legalkalmasabbnak az egyes évek vonulásdinamikai sajátságainak elemzésére. E függvények nagy pontossággal (R=90,3%–98,7%) írták le a faj tavaszi vonulását még a szélsőséges adatsorokkal jellemezhető években is. Eredményeink alapján javasoljuk az általunk alkalmazott Gauss-függvények speciális lineáris kombinációinak alkalmazását más madárfajok vonulási karakterisztikájának értékelésére is.

ABSTRACT. In the analysis of the spring migration of the woodcock (*Scolopax rusticola* L.), specific functions were adapted and fitted to model the dynamic characteristics of the migration, which are suitable for characterizing the process, expressing its variations and evaluating them by mathematical methods. Based on our results, the special linear combinations of Gaussian functions were found to be the most suitable for migration dynamics analysis for each year. These functions described the spring migration of the species with high accuracy (R=90.3%-98.7%), even in the years characterized by extreme data series. Based on our results, we propose the use of special linear combinations of our Gaussian functions to evaluate the migration characteristics of other bird species.

KULCSSZAVAK. Erdeiszalonka-vonulás, vonulásmodellezés, nemlineáris regresszió, Awrami-modell, Gauss-modell
KEYWORDS. Woodcock migration, migration modelling, nonlinear regression, Awrami-model, Gauss-model

1. Bevezetés

Az EU madárvédelmi direktívája a vadászati törvénybe (1996. évi LV.), annak 2008-as módosítása során került be, aminek következtében 2009-től kezdődően ugyan vadászható faj maradt az erdei szalonka, de vadászati idényt nem állapítottak meg rá. A direktívától való eltérés feltételeként az Országos Magyar Vadászati Védegylet koordinálásával, 2009-ben vette kezdetét a Szent István Egyetem által vezetett megfigyeléses Erdei Szalonka Monitoring, amihez 2010-ben biometriai vizsgálati modullal csatlakozott a Nyugat-Magyarországi Egyetem (ma Soproni Egyetem), Erdőmérnöki Karának Vadgazdálkodási és Gerinces Állattani Intézete. A fenti munka nyomán páratlan lehetőség kínálkozott az erdei szalonka tavaszi vonulásának nagy elemszámú minta alapján történő idősoros vizsgálatára.

Kutatva a modellalkotás lehetőségeit a madárvonuláskutatásban a szakirodalomban nem találhatunk olyan matematikai módszert, amely alkalmas lett volna az általunk vizsgált madárvonulás megfelelő modellezésére. Az alkalmazott eljárások jellemzően vonaldiagrammok segítségével jellemzik a folyamatokat, amelyek ugyan szemléletesek, de a segítségükkel végzett vizsgálatok – a ponthalmazok összehasonlítási lehetőségei – nagyon felületesek, mégis ezek a megoldások a legelterjedtebbek.

2. Anyag és módszertan

A 2010-es év tavaszától az Országos Magyar Vadászati Védegylet koordinálásával működő Erdei Szalonka Teríték Monitoring alapozta meg a faj tavaszi vonulásdinamikájának országos léptékű, nagy elemszámú vizsgálatát. A mintavétel során rögzítésre került a madarak elejtésének helye (megye, település, gazdálkodó) és a mintavétel pontos ideje (hónap, nap, óra, perc). A mintavételi adatlapok az első időszakban (2010–2014) a Nyugat-Magyarországi Egyetem (ma Soproni Egyetem) Vadgazdálkodási és Gerinces Állattani Intézetébe érkeztek. A monitoring második időszakában (2015–2019) az adatszolgáltatók által beküldött alapadatok (elejtési hely és idő, ivar) a Szent István Egyetemre érkeztek, majd ezeket az intézmény munkatársai továbbították intézetünkbe. A fenti adatgyűjtő munka eredményeképpen 23 539 erdei szalonka vonulási adataiból építettünk adatbázist a 2010 és 2019 közötti tavaszi vonulásdinamika értékeléséhez. Az vizsgálat során az elejtések számának időbeli változását arányosnak tekintettük a tavaszi vonulás során átvonuló madarak mennyiségének változásával, tehát az elejtések eredményei hűen tükrözik a Magyarországon átvonuló erdei szalonka állományok tavaszi vonulásának időmintázatát [1]. Célunk olyan nemlineáris regressziós függvények adaptálása és illesztése volt, amelyek alkalmasak a faj vonulásdinamikai sajátságainak modellezésére és az eltérések szemléletes kifejezésére, azok értékelésére.

Az alapadatbázisok kezelését és a leíró statisztikai elemzéseket Microsoft Excel 2016 program, míg a függvényillesztéseket Statistica 13 program segítségével végeztük. A modellek szélsőértékeinek koordinátáit WinPlot 10.7 programmal határoztuk meg. Az adatok statisztikai elemzését, valamint azok grafikus megjelenítését Microsoft Excel 2016 és Statistica 13 program segítségével végeztük.

3. Eredmények

Az egyes mintavételi napokhoz tartozó elejtési számok koordinátapárjai által kirajzolt ponthalmaz sajátságaihoz igazodó, szerkesztett modellek segítségével jellemeztük az erdei szalonka tavaszi vonulásdinamikáját. Az alkalmazott statisztikai módszer a nemlineáris regresszió számítás, amely során az alkalmasnak vélt tesztelt modellek segítségével írtuk le a folyamatot. A modelleknek számos kritériumnak kellett megfelelnie, úgymint a zárt értelmezési tartományon való értelmezhetőség, a korlátosság tulajdonsága, továbbá a folyamat jellemzése szempontjából kiemelt jelentőséggel bíró elvárás, az egy vagy több szélsőérték megléte, továbbá az ezek meghatározását lehetővé tevő differenciálhatóság.

A modellalkotáshoz először az Awrami-függvény szolgáltatott alapot. E függvény – mivel telítődési függvény – alapfüggvény formájában, kellő transzformálás és megfelelő parametrizálás hiányában nem alkalmas a vizsgálatunk tárgyát képező adathalmaz modellezésére, így – egy az erdei szalonka vonulási karakterisztikájához igazodó – modellfejlesztésre volt szükség. Ennek megfelelően két egymáshoz képest eltolt helyzetű Awrami-függvény szuperponáltjaként megalkotott kilenc változós modellt [2]. illesztettünk az adatsorokra.

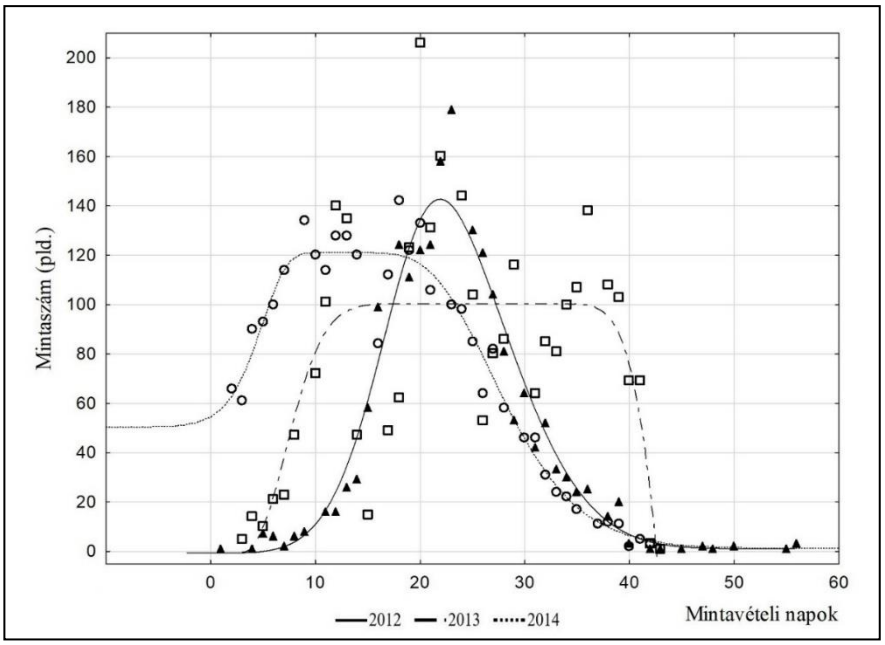
I. modell: A kettős Awrami függvény matematikai alakja:

$$y = b_8 - b_7 \cdot e^{-1\cdot\left(b_6\cdot(x-b_5)\right)^{b_4}} - b_3 \cdot e^{-1\cdot\left(-1\cdot b_2\cdot(x-b_1)\right)^{b_0}}$$

A kezdőértékek meghatározása az adatsor értékei alapján a következő:

b_8=a maximális vagy minimális var_2 érték,
b_7=a maximális vagy minimális var_2 érték mínusz a kezdő var_2 érték,
b_6=a var_1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében értéke 0,1, (0,05),
b_5=a var_1 kezdőértéke, vagy annál relatív kisebb,
b_4=az esetek többségében értéke 3; (5),
b_3=a maximális vagy minimális var_2 érték mínusz a végső var_2 érték,
b_2=a var_1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében értéke 0,1; (0,05),
b_1=a var_1 végsőértéke vagy annál relatív nagyobb,
b_0=az esetek többségében értéke 3; (5).

A fenti függvény minden olyan adatsor regressziós vizsgálatára alkalmas, amely adatsorának var_2 értéke (jelen esetben a mintaszám (pld.)) a vizsgálati időszak intervallumán szélsőértékkel rendelkezik és zárt intervallumon ($b5<var_1<b1$) értelmezhető (1 ábra).



1. ábra: Az alkalmazott kettős Awrami-függvény illesztési eredménye a 2012-es (normál karakterisztikájú), a 2014-es (előretolódó karakterisztikájú) és a 2013-as (szélsőséges, több szélsőértékkel jellemezhető karakterisztikájú) évek tavaszi erdeiszalonka-vonulásának adatsoraira.

Az alkalmazott kettős Awrami-modell rugalmasságát az egyes évek vonulási adatsoraira történő illesztés pontosságát jelző regressziós koefficiensek és a monotonitás értékeit mutatják (1. táblázat).

Év	Elemszám	Illesztési pontosság (%)	Vonulás tetőzése	Monotonitási jellemző értékek	
				Növekedésjelző (b_6*b_4)	Csökkenésjelző (b_2*b_0)
2010	2 331	98,29	III.21.	0,2813	0,2879
2011	3 324	98,17	III.24.	0,1693	0,1693
2012	1 889	97,70	III.21.	0,2715	0,2715
2013	2 868	***70,62***	III.19. III.29.*	0,3913*	0,2176*
2014	2 681	97,70	III.13.	0,4762	0,4762
2015	2 656	97,82	III.18.	0,2198	0,2198
2016	2 111	95,10	III.18.	0,7140	0,1895
2017	1 660	96,75	III.19.	0,1666	0,2577
2018	1 716	***88,44***	III.21.	0,1618	0,0972
2019	1 716	96,73	III.24.	0,5244	0,0959

*Az adatsor hektikussága miatt a vonulás tetőzése és a monotonitás bizonytalanul értékelhető.

1. táblázat: Az erdei szalonka tavaszi vonulásának kettős Awrami-modell szerinti jellemzői a 2010–2019 közötti években.

Az egy csúcsú, aszimmetrikus karakterisztikát tükröző években a folyamat jellemzésére alkalmasnak bizonyultak az Awrami-függvényekből készített modellek. Azonban a szélsőséges vonulási karakterisztikával (több hullámban zajló vonulás, több szélsőérték) jellemezhető évek adatsorai esetében e függvények alkalmatlanok a folyamat kellő pontosságú leírásához. Így modellalkotásunk során a több szélsőérték megléte esetén is kellő rugalmasságot, s így megfelelő illesztési pontosságot (R_{2013}=90,35%; R_{2018}=97,50%) eredményező függvényt választottuk, amihez a közismert Gauss-függvény jelentette az alapot. Az alapfüggvény – a vizsgálati adatsorok jellegéből fakadóan és a függvény ismert szimmetria tulajdonsága miatt – transzformáció hiányában nem alkalmas a folyamat jellemzésére. Ennél egy lényegesen rugalmasabb modellre volt szükség, ami a paraméterek számának jelentős növelését tette szükségessé. A fenti követelményeknek az alábbi két Gauss-függvény lineáris kombinációja felet meg.

II. modell: A kettős Gauss-függvény matematikai alakja:

$$y = \frac{b_6}{e^{(b_5(x-b_4))^2}} + \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

A modellt hét – különböző nyújtási és eltolási – paraméter jellemzi, amelyek biztosítják a függvény kellő rugalmasságát, így az adatsor aszimmetriájához megfelelő illesztési pontossággal igazodó modellt kaptunk.

A kezdőértékek meghatározása az adatsor értékei alapján a következő:

b_6=var$_{2\text{első max.}}$-var$_{2\text{min.}}$ vagy b_6=var$_{2\text{első min.}}$-var$_{2\text{max,}}$
b_3=var$_{2\text{ másod. max.}}$-var$_{2\text{min.}}$ vagy b_3=var$_{2\text{ másod. min.}}$-var$_{2\text{ max,}}$
b_4=var$_{1\text{ első max.}}$ vagy var$_{1\text{ első min,}}$
b_1=var$_{1\text{másod. max.}}$ vagy var$_{1\text{ másod. min,}}$
b_0=var$_{2\text{min,}}$
b_5=b_2~0,05.

A szélsőértékek számának növekedése miatt a modellt tovább alakítottuk, így a b_0 paraméter helyett egy új Gauss-tag hozzáadásával jutottunk az újabb modellhez.

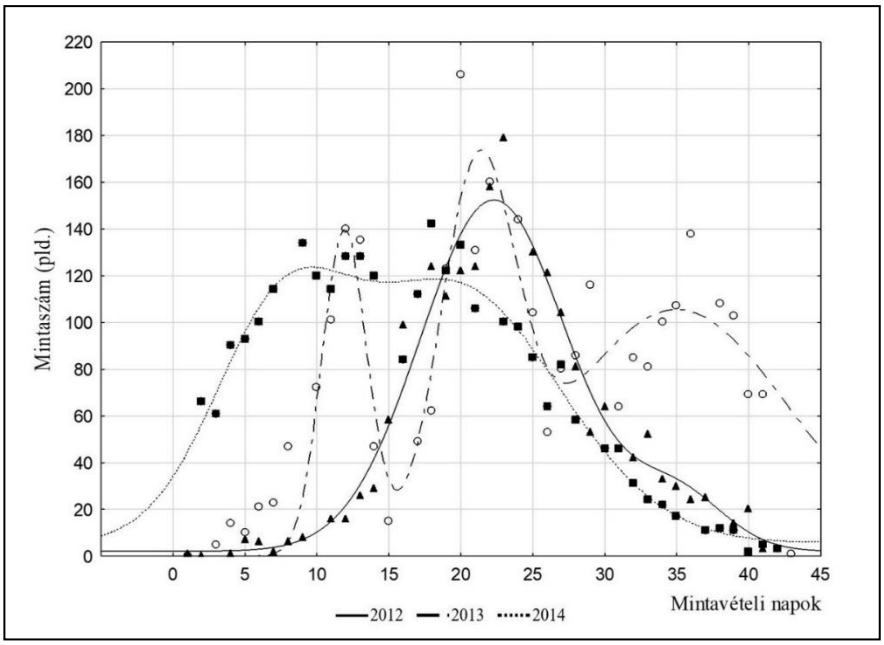
III. modell: A hármas Gauss-függvény matematikai alakja:

$$y = \frac{b_8}{e^{(b_7(x-b_6))^2}} + \frac{b_5}{e^{(b_4(x-b_3))^2}} + \frac{b_2}{e^{(b_1(x-b_0))^2}},$$

Ezen utóbbi modell alkalmazása akkor indokolt, ha a tavaszi vonulás lefolyását a normál évektől eltérően több szélsőérték, szélsőséges dinamika jellemezi (2. ábra).

A kezdőértékek meghatározása az adatsor értékei alapján a következő:

b_8=var$_{2\text{ első max.}}$-var$_{2\text{ első min,}}$
b_6=var$_{1\text{ első max,}}$
b_5=var$_{2\text{második max.}}$-var$_{2\text{második min,}}$
b_3=var$_{1\text{ második max,}}$
b_2=var$_{2\text{ harmadik max,}}$
b_0=var$_{1\text{ harmadik max,}}$
b_7=b_4=b_1~0,05.



2. ábra: Az alkalmazott kettős és hármas Gauss-modell illesztési eredménye a 2012-es (normál karakterisztikájú), a 2014-es (előretolódó karakterisztikájú) és a 2013-as (szélsőséges, több szélsőértékkel jellemezhető karakterisztikájú) évek tavaszi erdeiszalonka-vonulásának adatsoraira.

A modellek kezdőértékei a vizsgálati adathalmaz értékei alapján a fent jelzett módon a független (var_1) és függő (var_2) változó intervallum határai, illetve a függő változó pontsorozaton belüli legnagyobb és legkisebb értékei, illetve azok helyei alapján számíthatók [3].

Év	Elemszám	Illesztési pontosság (%)	Vonulás tetőzése	Monotonitási jellemző differenciahányadosok	
				Maximum előtt	Maximum után
2010	2 331	97,79	III. 23.	8,50	-10,23
2011	3 324	98,36	III. 24.	11,33	-14,91
2012	1 889	97,95	III. 22.	7,11	-3,79
2013	2 868	***90,35***	III. 12., III. 21.	12,81*	-6,07**
2014	2 681	97,56	III. 10.	6,66	-3,78
2015	2 656	97,60	III. 16.	9,65	-5,59
2016	2 111	95,41	III. 08. III.16.	10,38	-2,96
2017	1 660	98,74	III. 19.	8,68	-6,5
2018	1 716	***97,50***	III. 15., III. 25.	9,02*	-7,98**
2019	1 716	96,31	III. 17.	5,57	-3,85

*Az első szélsőértéket megelőző függvényszakaszra vonatkozó differenciahányados.

**Az utolsó szélsőértéket követő függvényszakaszra vonatkozó differenciahányados.

1. táblázat: Az erdei szalonka tavaszi vonulásának kettős és hármas Gauss-modell szerinti jellemzői a 2010–2019 közötti években.

A faj tavaszi vonulásának modellezésére alkalmazott összetett függvények kezdőértékeinek megadását követően látható, hogy a segítségükkel meghatározott paraméterek mindegyike tényleges információtartalommal bír (pl.: monotonitás jelző értékek meghatározása). Az alapadatokból kalkulált paramétereket (b_0, …, b_8) a fent megadott függvényekbe helyettesítve a vonulásdinamika lefolyását jellemző sajátságok matematikai módszerekkel leírhatók [3], [4], így az alkalmazott modellek kielégítik azokat az igényeket, amelyek a nemlineáris regressziós függvények illesztése során szükségszerűek.

Az alkalmazott modellek illesztési pontosságát illetően számottevő eltérést tapasztaltunk. A speciális kettős Awrami-függvények csak a szélsőségektől mentes, egy szélsőértékkel jellemezhető, enyhén aszimmetrikus adatsorok elemzésére voltak alkalmasak (R=98,3%–96,7%). A több szélsőértékkel jellemezhető években gyengébb illesztési pontosság (R_{2013}=70,6%; R_{2018}=88,4%) miatt alkalmazási lehetősége a madárvonulás modellezésében korlátozott. A Gauss-függvények speciális lineáris kombinációi a fenti hiányosságot küszöbölik ki. Az adatsorhoz igazított számú újabb Gauss-tagok beépítésével a modell több szélsőérték esetén is alkalmassá tehető a folyamat kellő pontosságú – a biológiai tartalmat tekintve is értelmes – matematikai leképezésére, és a vonulás tetőzésének meghatározására, amit a szélsőséges vonulási karakterisztikájú évek illesztési eredményei jól tükröznek (R_{2013}=90,4%; R_{2018}=97,5%).

Az alkalmazott modellek szélsőértékeinek meghatározásához szükséges differenciálhatóság elégséges feltétele minden esetben teljesül ugyan, de a szélsőértékek koordinátái egyszerű analitikus módszerekkel nem határozhatók meg. Emellett az Awrami és Awrami-modell esetében a szélsőséges karakterisztikájú adathalmazok elemzési lehetősége korlátozott, hiszen a vonulás tetőzését jelző szélsőértékek meghatározásának lehetősége bizonytalan, ami elemi fontosságú a folyamat leírásánál és a további elemzések során (pl.: az időjárási viszonyok vonulásdinamiát befolyásoló szerepének feltárása során) [5].

Az egyes évek vonulásdinamikai sajátságait leíró kettős Awrami függvények esetében a megfelelő paraméterek szorzatai (b_6*b_4↑; b_2*b_0↓), míg a Gauss-modellek esetén a vonulás jellemző kezdő- és záróidőpontjaihoz (március 1.– április 10.) tartozó mintaszámok. Továbbá az abszolút szélsőértékek alapján számított differenciahányadosok lesznek a regressziós modellek átlagos intenzitásjelző értékei, amelyek segítségével a vonulási csúcsot megelőző és az azt követő függvényszakasz növekedési és csökkenési sajátságai számszerűen kifejezhetők és összevethetők. Mindez lehetővé teszi a folyamat intenzitási viszonyainak matematikai módszerekkel történő leírását.

4. Összefoglaló

A 2010 és 2019 közötti időszakban Magyarországon a tavaszi mintagyűjtés során terítékre került erdei szalonkák (n=23 539 pld) tavaszi vonulás-dinamikáját speciális, nem lineáris regressziós eljárással vizsgáltuk. A tíz mintavételi időszakban megvalósult monitorig során az országos léptékű, reprezentatív mintavételezés nagy elemszámú adatsorai a vonulásdinamika kellően megalapozott statisztikai elemzését tettek lehetővé. Olyan modelleket adaptáltunk a vizsgált faj tavaszi vonulásának leírására, amelyek alkalmasak a dinamikai eltérések matematikai módszerekkel történő kifejezésére. A ponthalmazok sajátságaihoz igazodó modelleknek több kritériumnak kellett megfelelniük, amit a regressziós eljárás során a vizsgálat tárgyát képező adathalmaz határozott meg. Elvárás volt a korlátosság tulajdonsága, továbbá a vonulási folyamat jellemzése szempontjából kiemelt jelentőséggel bíró egy vagy több szélsőérték meghatározásának lehetősége. A tavaszi szalonkavonulás karakterisztikája az egyes mintavételi időszakok között számottevő eltérést mutatott. Az egyes évek dinamikai lefutásának szemléletes megjelenítéséhez, Awrami-függvények kombinációit, illetve kétszeres, és háromszoros Gauss-függvények lineáris kombinációit alkalmaztuk.

A Gauss-függvényekből előállított modellek bizonyultak a legkedvezőbbnek mind a normál, mind pedig a szélsőséges karakterisztikával jellemezhető évek esetén, amit az illeszkedési pontosság magas – 90,3% és 98,7% közötti – értékei jeleznek. Az alkalmazott Gauss-modellek számított szélsőértékei a vonulási csúcsok meghatározását minden esetben lehetővé tették. A vonulási folyamat változási intenzitásának értékeléséhez a modell alapján számított differenciahányadosok szolgáltattak információt (1. táblázat).

A fentiek alapján a vizsgálati évek a következőképpen jellemezhetők:

- Normál, aszimmetrikus Gauss-görbe jellegű, egy maximummal jellemezhető karakterisztikájú évek: 2010, 2011, 2012; 2015, 2017.
- Előretolódott, aszimmetrikus, ellaposodó Gauss görbe jellegű, több szélsőértékkel jellemezhető karakterisztikájú évek: 2014, 2016, 2019.
- Zavart karakterisztikájú, több szélsőértékkel jellemezhető évek: 2013, 2018.

Eredményeink alapján az Gauss-függvények lineáris kombinációi alkalmasnak bizonyultak a tavaszi madárvonulás dinamikai sajátságainak modellezésére, a karakterisztika sajátságainak értékelésére, így alkalmazásukat javasoljuk a hasonló dinamikájú biológiai folyamatok statisztikai értékelése során.

Köszönetnyilvánítás.

A vonulásdinamika értékelését megalapozó adatgyűjtés az Országos Magyar Vadászati Védegylet koordinálásával működő Erdei Szalonka Monitoring Program keretében valósult meg. Köszönjük a mintagyűjtő vadásztársak áldozatos munkáját, valamint a monitoring működtetésében közreműködők segítségét.

Irodalomjegyzék

[1] **Faragó S., László R., Bende A.,** Az erdei szalonka *(Scolopax rusticola)* teríték monitoring eredményei 2010-ben Magyarországon. Results of the Hungarian Woodcock *(Scolopax rusticola)* Bag monitoring in 2010. Magyar Vízivad Közlemények **22.** (2012a), 285–296.

[2] **Faragó S., László R., Bende A.,** Az erdei szalonka *(Scolopax rusticola)* teríték monitoring eredményei 2011-ben Magyarországon. Results of the Hungarian Woodcock *(Scolopax rusticola)* Bag monitoring in 2011. Magyar Vízivad Közlemények **22.** (2012b), 297–310.

[3] **Faragó S., László R., Bende A**. (2014): Az erdei szalonka *(Scolopax rusticola)* teríték monitoring eredményei 2012-ben Magyarországon – Results of the Hungarian Woodcock *(Scolopax rusticola)* Bag Monitoring in 2012. *Magyar Vízivad Közlemények* **24** 283–295.

[4] **Faragó S., László, R., Bende A.,** Az erdei szalonka *(Scolopax rusticola)* teríték monitoring eredményei 2013-ban Magyarországon - Results of the Hungarian Woodcock *(Scolopax rusticola)* Bag Monitoring in 2013. *Magyar Vízivad Közlemények* **25.** (2015a), 289–302.

[5] **Faragó S., László R., Bende A.,** Az erdei szalonka (*Scolopax rusticola*) ivararányának alakulása 2010–2014 között Magyarországon. *In:* Bidló, A. & Facskó, F. (szerk.) V. Kari Tudományos Konferencia. Sopron, 2015.10.25. Konferencia Kiadvány, Nyugat-magyarországi Egyetem, Soproni Egyetem Kiadó. (2015b), 105–107.

[6] **Faragó S., László R., Bende A.,** Az erdei szalonka *(Scolopax rusticola)* teríték monitoring eredményei 2014-ben Magyarországon - Results of the Hungarian Woodcock *(Scolopax rusticola)* bag monitoring in 2014. *Magyar Vízivad Közlemények* **27.** (2016), 284–296.

[7] **Schally G.,** Az erdei szalonka *(Scolopax rusticola)* megfigyelési és elejtési adatainak vizsgálata Magyarországon 2009–2018 között. PhD doktori értekezés, Szent István Egyetem, Gödöllő. (2020). p. 114.

[8] **Csanády V.,** Gazdasági változások regressziós vizsgálata, Dimenziók IV. (2017), 39–49. doi:10.20312/dim.2017.06
[9] **Csanády V.,** Kettős Awrami függvény alkalmazása, Dimenziók VI. (2018), 41–48. doi:10.20312/dim.2018.05
[10] **Csanády V.,** Kettős Gauss függvény alkalmazása, Dimenziók VII. (2019), 37–47. doi:10.20312/dim.2019.05
[11] **Csanády V.,** Nemlineáris regressziók alkalmazása gyakorlati példákban, Dimenziók I. (2013), 19–26.

doi:10.20312/dim.2021.04

Csillapított rezgések differenciálegyenletes modelljei

Horváth-Szováti Erika
Soproni Egyetem
Informatikai és Matematikai Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A rezgések mozgásegyenletei másodrendű differenciálegyenletek, amelyekkel többek között az erdészeti és környezetvédelemi kutatások területén is gyakran találkozhatunk. Az ilyen típusú differenciálegyenletek konkrét fizikai példákkal történő szemléltetése – a hallgatók gyakran korlátozott matematikai háttértudása miatt – csak alaposan végiggondolt, és a lehetőségekhez mérten maximálisan leegyszerűsített példák segítségével lehetséges.

ABSTRACT. Here are simple practical examples that highlights the practical application of differential equations. To solve these math problems, students need only a little background knowledge. By these exercises students can see that differential equations are essential in different sciences.

1. Bevezetés

A természetben számos jelenség rezgésekként, vagy rezgések összetételeként írható le. Több kölcsönhatás eredményezhet különböző típusú rezgéseket, illetve hullámokat (mechanikai tárgyú rezgések, elektromágneses jelenségek, kvantummechanika, stb.). Az előző évi kiadványban megjelent munka folytatásaként itt a csillapított rezgések mozgásegyenleteit szemléltetem egyszerű példákkal. Ez a téma fontos lehet az erdőmérnök, környezetmérnök, sőt akár a faipari mérnök hallgatók számára is, ugyanis a hangterjedés vizsgálata, a rezgéscsillapítás lehetőségei, valamint a zaj- és rezgésvédelem témakörök során találkozhatnak ilyen rezgéstípusokkal. A matematika oktatásakor gyakran szembesülünk azzal, hogy egy adott tananyag nehezen köthető össze konkrét, mérnöki alkalmazásokkal. Ennek oka többek között az, hogy a matematika alapozó tantárgy, és a hallgatóság még nem rendelkezik kellő tudással a speciális szakterületekről. Később, az egyes szaktárgyak tanulásakor/tanításakor ugyanez a nehézség fordítva is fennáll. A diákok többsége már csak felületesen emlékszik a matematikából tanultakra, emiatt az adott tudományterület által használt matematikai modellek végeredményei sok esetben levezetés nélkül memorizálandó képletekké válnak. Az itt bemutatásra kerülő egyszerű példák a matematika és fizika tananyag között próbálnak kapcsolatot teremteni. A harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete egy állandó együtthatós, másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet, melynek megoldása a rezgés kitérés-idő függvénye. Ismert, hogy a karakterisztikus egyenlet megoldásának három esete van: 2 valós szám, 1 valós szám vagy 2 komplex szám. Azt, hogy ezek közül melyik valósul meg, az ω körfrekvencia és a k csillapítási konstans egymáshoz való viszonya határozza meg.

2. Erősen csillapodó harmonikus rezgés

Erős csillapításról akkor beszélünk, ha a csillapítási konstans nagyobb, mint a körfrekvencia (azaz $k > \omega$). Ebben az esetben a karakterisztikus egyenlet megoldásai $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, különböző valós számok. Ilyenkor a differenciálegyenlet megoldásául kapott kitérés-idő függvény $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ alakú, amely $t \to \infty$ esetén nagyon gyorsan tart nullához. Oszcilláció nincs, a függvény alakja a kezdeti feltételektől függően háromféle lehet. Ezekről általánosan elmondható, hogy mindegyik legfeljebb egyszer vált előjelet (ld. későbbi feladatok), és mindegyik esetben erős csillapítást tapasztalunk. Az alábbiakban erre a három esetre található egy-egy egyszerű példa megoldással.

2.1. feladat. Egy harmonikus rezgőmozgást végző testre a közegellenállás csillapításként hat, amely a sebességgel arányos, és azzal ellentétes irányú. Ekkor a test mozgását leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) - k\dot{x}(t)$, ahol $x(t)$ a test kitérése az idő függvényében, az ω arányossági tényező a körfrekvencia, $k(> 0)$ pedig a csillapítási konstans. Legyen $\omega = 4\sqrt{2}\ \frac{1}{s}$, $k = 12\ \frac{Ns}{m}$, és a test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor 8 $\frac{m}{s}$. Határozzuk meg a test kitérését a $t = 1s$ időpillanatban! Mely időpillanatban következik be és mekkora a maximális kitérés?

Megoldás.
A differenciálegyenlet megoldása a karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározásával kezdődik (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$):

$$\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) + 32x(t) = 0,$$
$$\lambda^2 + 12\lambda + 32 = 0,$$
$$\lambda = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 32}}{2},$$

amelyből $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -8$. Tehát a karakterisztikus egyenlet megoldása két negatív valós szám, az általános megoldás pedig

$$x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-8t}, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kapott függvényt deriváljuk:

$$\dot{x}(t) = -4C_1 e^{-4t} - 8C_2 e^{-8t}.$$

A kezdeti feltételek szerint $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 8$, ezeket behelyettesítve az utóbbi két egyenletbe $C_1 = 2$ és $C_2 = -2$ adódik, a partikuláris megoldás pedig

$$x_p(t) = 2e^{-4t} - 2e^{-8t}.$$

Ebből meghatározható a test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban:

$$x_p(1) = 2e^{-4} - 2e^{-8} \approx 0{,}03596\ (m).$$

Látható, hogy a kitérés-idő függvény határértéke $t \to \infty$ esetén $\lim_{t\to\infty}(2e^{-4t} - 2e^{-8t}) = 0$, azaz valóban lecsengő függvényről van szó. (A függvény határértékének fogalma sajnos nem tananyag, ezért részletesebb magyarázat szükséges.)

A feladatban kérdés az is, hogy mely időpillanatban következik be és mekkora a maximális kitérés. Az $x_p(t) = 2e^{-4t} - 2e^{-8t}$ függvény teljes diszkusszióját hallgatóink nem tudják elvégezni, mert nem minden lépése tananyag. A monotonitásvizsgálat, az esetleges lokális szélsőértékek, illetve a konvexitás, konkávság, és az esetleges inflexiós pontok meghatározása számukra is ismert eljárások és fogalmak, az ezekre vonatkozó számítások alább láthatók.

A monotonitást az első derivált segítségével vizsgáljuk.

$$\dot{x}_p(t) = -8e^{-4t} + 16e^{-8t},$$
$$-8e^{-4t} + 16e^{-8t} = 0,$$
$$e^{-4t} = \frac{1}{2},$$

ebből $t = \frac{1}{4} ln2 \approx 0{,}17\ (s)$, ami az alábbi táblázat alapján lokális maximumhely.

	$0 \leq t < \frac{1}{4} ln2$	$t = \frac{1}{4} ln2$	$\frac{1}{4} ln2 < t$
$\dot{x}_p(t)$	$+$	0	$-$
$x_p(t)$	$\uparrow$	lokális maximum	$\downarrow$

A függvény maximumának értéke

$$x_p\left(\frac{1}{4} ln2\right) = 2e^{-4\frac{1}{4}ln2} - 2e^{-8\frac{1}{4}ln2} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\ (m)\ .$$

Bár a feladatban nem kérdés, de tanulságos lehet a függvény konvexitásának és konkávságának vizsgálata. Erről a második derivált zérushelye ad információt:

$$\ddot{x}_p(t) = 32e^{-4t} - 128e^{-8t},$$
$$32e^{-4t} - 128e^{-8t} = 0 \qquad / : 32e^{-4t} (\neq 0),$$
$$e^{-4t} = \frac{1}{4},$$

ebből $t = \frac{1}{4} ln4 \approx 0{,}35\ (s)$, ami az alábbi táblázat alapján inflexiós pont.

	$0 \leq t < \frac{1}{4} ln4$	$t = \frac{1}{4} ln4$	$\frac{1}{4} ln4 < t$
$\ddot{x}_p(t)$	$-$	0	$+$
$x_p(t)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

A függvény grafikonjának alakjával kapcsolatban fontosak a tengelymetszetek is.
Mivel a feladat szövegében adott volt, hogy a kitérés $t = 0\ s$ időpillanatban 0 méter, így a grafikon kezdőpontja az origó. Ezt a behelyettesítést akár a partikuláris megoldás ellenőrzésének is tekinthetjük:

$$x_p(0) = 2e^{-4\cdot 0} - 2e^{-8\cdot 0} = 2 - 2 = 0\ (m).$$

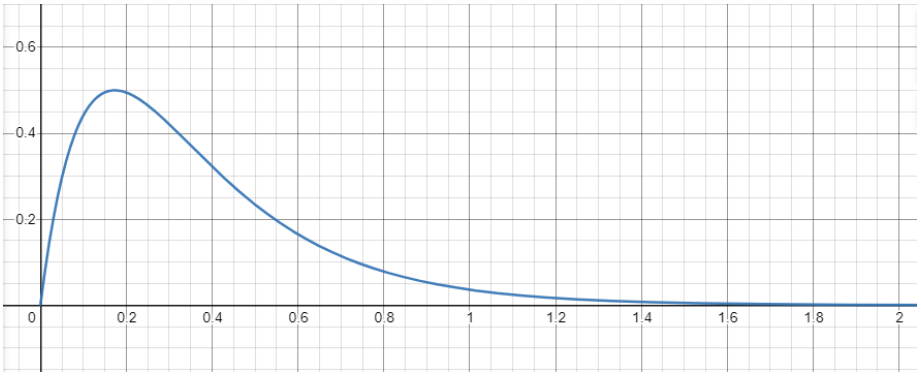
Van vajon a „t” tengelyen további tengelymetszet is? Az alábbi számítás mutatja, hogy nincs:

$$2e^{-4t} - 2e^{-8t} = 0$$

$$e^{-4t} - (e^{-4t})^2 = 0 \qquad /: e^{-4t} (\neq 0)$$
$$1 - e^{-4t} = 0$$
$$e^{-4t} = 1$$
$$t = 0\ (s)$$

Tehát a függvény nem vált előjelet, a kitérés iránya nem változik a rezgés során.

Az $x_p(t) = 2e^{-4t} - 2e^{-8t}$ függvény grafikonján jól láthatók az előbb számításokkal meghatározott eredmények (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (m)).



Összegezve: A kitérés eleinte nő, majd elér egy maximumot, attól kezdve csökkenni kezd, majd közelíti a nullát. A függvény nem halad át a vízszintes tengelyen (nincs zérushelye), a kitérés végig pozitív irányú marad.

2.2. feladat. Az előző feladatot oldjuk meg ismét, de változtassunk a kezdeti feltételeken.

a) A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0,5 méter, a sebessége ugyanekkor $-8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0,5 méter, a sebessége ugyanekkor $-2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Megoldás.

a) A 2.1. feladat általános megoldásából kiindulva:

$$x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-8t}, \text{ illetve}$$

$$\dot{x}(t) = -4C_1 e^{-4t} - 8C_2 e^{-8t}, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kezdeti feltételek szerint $x(0) = 0{,}5$ és $\dot{x}(0) = -8$, ezek visszahelyettesítésével a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{-8\cdot 0} &= 0{,}5 \\ -4C_1 e^{-4\cdot 0} - 8C_2 e^{-8\cdot 0} &= -8 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása $C_1 = -1$, $C_2 = 1{,}5$, a partikuláris megoldás pedig:

$$x_p(t) = -e^{-4t} + 1{,}5e^{-8t}.$$

Ebből meghatározható a test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban:

$$x_p(1) = -e^{-4} + 1{,}5e^{-8} \approx -0{,}01781\ (m),$$

ahol a negatív előjel a kezdeti kitéréssel ellentétes irányú kitérést mutatja.

A függvény a diszkussziójának egyes lépései a 2.1. feladathoz hasonlóan itt is elvégezhetők.

$$\dot{x}_p(t) = 4e^{-4t} - 12e^{-8t}$$
$$4e^{-4t} - 12e^{-8t} = 0$$
$$e^{-4t} = \frac{1}{3}$$

ebből $t = \frac{1}{4} ln3 \approx 0{,}27\ (s)$, ami az alábbi táblázat alapján lokális minimumhely.

	$0 \leq t < \frac{1}{4} ln3$	$t = \frac{1}{4} ln3$	$\frac{1}{4} ln3 < t$
$\dot{x}_p(t)$	$-$	0	$+$
$x_p(t)$	$\downarrow$	lokális minimum	$\uparrow$

A függvény minimumának értéke

$$x_p\left(\frac{1}{4} ln3\right) = -4e^{-4\frac{1}{4}ln3} + 1{,}5e^{-8\frac{1}{4}ln3} = -4 \cdot \frac{1}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{1}{9} = -\frac{7}{6}\ (m)\ .$$

A második derivált vizsgálata:

$$\ddot{x}_p(t) = -16e^{-4t} + 96e^{-8t}$$
$$-16e^{-4t} + 96e^{-8t} = 0 \qquad /:(-16e^{-4t})(\neq 0),$$
$$e^{-4t} = \frac{1}{6}$$

Ebből $t = \frac{1}{4} ln6 \approx 0{,}45\ (s)$, ami az alábbi táblázat alapján inflexiós pont.

	$0 \leq t < \frac{1}{4} ln6$	$t = \frac{1}{4} ln6$	$\frac{1}{4} ln6 < t$
$\ddot{x}_p(t)$	$+$	0	$-$
$x_p(t)$	konvex	inflexiós pont	konkáv

A tengelymetszetek vizsgálata:

$$x_p(0) = -e^{-4 \cdot 0} + 1{,}5e^{-8 \cdot 0} = 0{,}5\ (m)\ ,$$

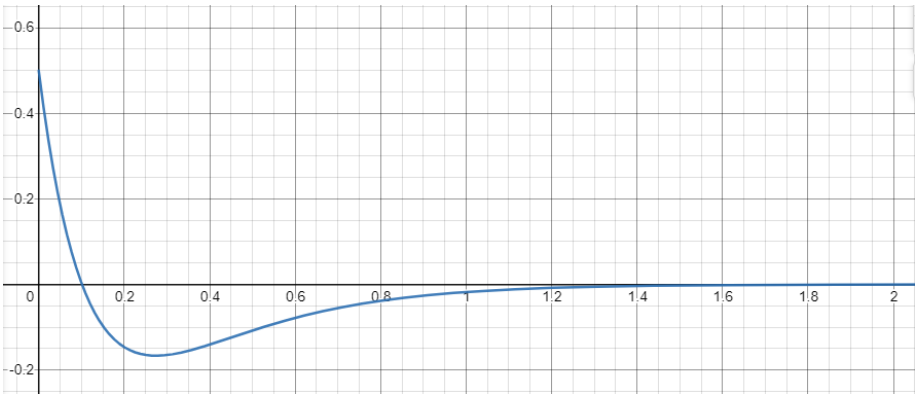
a függőleges tengely metszéspontjaként ezt az eredményt vártuk, hiszen ez volt a feladatban megadott kezdeti feltétel. A vízszintes tengelyen (idő tengely) a tengelymetszet:

$$-e^{-4t} + 1{,}5e^{-8t} = 0$$
$$-e^{-4t} + 1{,}5(e^{-4t})^2 = 0 \qquad /: e^{-4t}(\neq 0)$$
$$1 - 1{,}5e^{-4t} = 0$$

$$e^{-4t} = \frac{2}{3}$$

$$t = -\frac{1}{4} ln \frac{2}{3} = \frac{1}{4} ln \frac{3}{2} \approx 0{,}1\ (s)$$

A $x_p(t) = -e^{-4t} + 1{,}5e^{-8t}$ függvény grafikonján jól láthatók az előbb számolással meghatározott tulajdonságok (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (m)).



Összegezve: A kitérés a mozgás elejétől kezdve folyamatosan csökken. A függvény $t \approx 0{,}1\ s$ időpillanatban áthalad a vízszintes tengelyen (vagyis van zérushelye, azaz van olyan időpillanat, ahol a kitérés nulla). Ezt követően a negatív irányú kitérés növekszik, majd elér egy maximumot (ez a függvény abszolút minimuma), majd a negatív értékek felől közelít nullához.

b) Ismét a 2.1. feladat általános megoldásából indulunk ki, a kezdeti feltételekből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{-8\cdot 0} &= 0{,}5 \\ -4C_1 e^{-4\cdot 0} - 8C_2 e^{-8\cdot 0} &= -2{,}5 \end{aligned}\right\}$$

Ebből $C_1 = \frac{3}{8}$, $C_2 = \frac{1}{8}$ és a partikuláris megoldás:

$$x_p(t) = \tfrac{3}{8} e^{-4t} + \tfrac{1}{8} e^{-8t}.$$

Ebből meghatározható a test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban:

$$x_p(1) = \tfrac{3}{8} e^{-4} + \tfrac{1}{8} e^{-8} \approx 0{,}00691\ (m).$$

A függőleges tengelyen a tengelymetszet nyilván a feladatban megadott egyik kezdeti feltétel lesz:

$$x_p(0) = \tfrac{3}{8} e^{-4\cdot 0} + \tfrac{1}{8} e^{-8\cdot 0} = 0{,}5\ (m)\ .$$

A vízszintes tengelyen (idő tengely) nincs tengelymetszet, ugyanis minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $e^{-4t} > 0$ és $e^{-8t} > 0$, azaz

$$\tfrac{3}{8} e^{-4t} + \tfrac{1}{8} e^{-8t} > 0\ .$$

Az $\dot{x}_p(t)$ függvény (ugyancsak az előjelekről tett előbbi megállapítások miatt) minden t időpillanatban negatív értéket vesz fel:

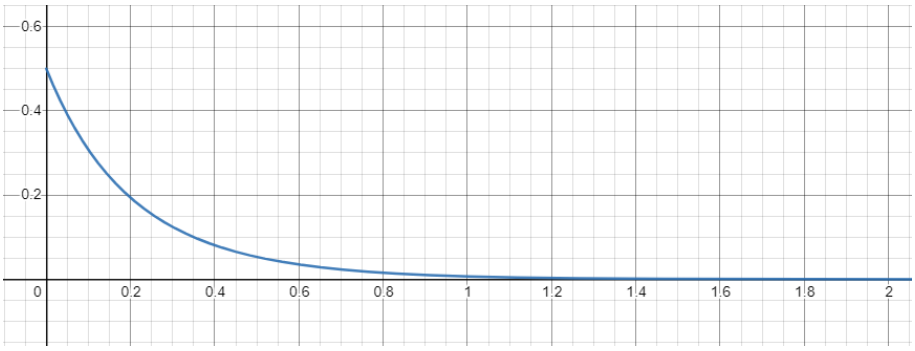
$$\dot{x}_p(t) = -\frac{3}{2}e^{-4t} - e^{-8t},$$

tehát az $x_p(t)$ függvény a teljes értelmezési tartományán szigorúan monoton csökken. Mivel $t \in [0, \infty[$, így a függvénynek $t = 0$ –ban abszolút maximuma van (ez a $t = 0$ értékhez tartozó 0,5 méteres kitérés). A második derivált

$$\ddot{x}_p(t) = 6e^{-4t} + 8e^{-8t},$$

amely minden t időpillanatban pozitív értéket vesz fel, tehát az $x_p(t)$ függvény a teljes értelmezési tartományán konvex.

A $x_p(t) = \frac{3}{8}e^{-4t} + \frac{1}{8}e^{-8t}$ függvény grafikonjáról leolvashatók az előbb számolással meghatározott tulajdonságok (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (m)).



Összegezve: A függvény maximuma a kiindulási kitérés érték. A függvénynek nincs zérushelye, a pozitív értékek felől közeledik a zérus kitéréshez.

3. Gyengén csillapodó harmonikus rezgés

Gyenge csillapításról akkor beszélünk, ha a közegellenállásnak kisebb (de nem elhanyagolható) a jelentősége. Ilyenkor $k < \omega$, és a karakterisztikus egyenlet megoldása egy komplex konjugált számpár (azaz $\lambda_{1,2} = \propto \pm \beta i$, ahol i az imaginárius egység). Ebben az esetben matematikai szempontból az $x(t) = e^{\alpha t}(C_1 sin\beta t + C_2 cos\beta t)$ alakú általános megoldás a szokványos. Itt most csak annak az esetnek a tárgyalására szorítkozunk, amikor a $t = 0$ s időpillanatban nem volt kitérés. Ellenkező esetben a képlet tovább bonyolódik, a szögfüggvények argumentumához egy újabb tag, az ún. fáziseltolódás is hozzáadódik. Ugyanez a megszorítás eredményezi azt is, hogy a $C_2 = 0$ (ahogy ezt az alábbiakban látni fogjuk). Emiatt a kitérés-idő függvény az

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} sin\beta t$$

alakra egyszerűsödik. Ennek a függvénynek a képe egy olyan „szinusz függvény”, amelynek kitérése $t \to \infty$ esetén exponenciálisan csökken, illetve közben a rezgés frekvenciája is csökken

(a szinusz függvények hullámai „egyre jobban összenyomódnak”). Tehát $t \to \infty$ esetén a kitérés is lassan nullához tart, a rezgés elhal.

3.1. feladat. Egy harmonikus rezgőmozgást végző testre a közegellenállás csillapításként hat, amely a sebességgel arányos, és azzal ellentétes irányú. Ekkor a test mozgását leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) - k\dot{x}(t)$, ahol $x(t)$ a test kitérése az idő függvényében. A körfrekvencia $\omega = \sqrt{6{,}5}\,\frac{1}{s}$, a közegellenállásból származó csillapítási konstans $k = 1\,\frac{Ns}{m}$. A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor $5\,\frac{m}{s}$. Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében! Határozzuk meg a test kitérését a $t = 1s$ időpillanatban!

Megoldás.
A differenciálegyenlet megoldása során a karakterisztikus egyenlet, illetve annak gyökei (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$):

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 6{,}5x(t) = 0,$$
$$\lambda^2 + \lambda + 6{,}5 = 0,$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6{,}5}}{2},$$

azaz $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}i$, az általános megoldás pedig

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 sin\frac{5}{2}t + C_2 cos\frac{5}{2}t\right), \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kezdeti feltételek visszahelyettesítésével a C_1 és C_2 konstansok meghatározhatók. Adott volt, hogy $x(0) = 0$, azaz

$$e^0(C_1 sin0 + C_2 cos0) = 0,$$

ebből $C_2 = 0$. Emiatt az általános megoldás erre az alakra egyszerűsödik:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} sin\frac{5}{2}t, \text{ ahol } C_1 \in \mathbb{R}.$$

A másik kezdeti feltétel szerint $\dot{x}(0) = 5$, ehhez deriváljuk az előbbi függvényt:

$$\dot{x}(t) = C_1\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} sin\frac{5}{2}t + \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}t} cos\frac{5}{2}t\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cdot C_1 \cdot \left(sin\frac{5}{2}t - 5cos\frac{5}{2}t\right).$$

Behelyettesítve a $t = 0$ értéket:

$$\dot{x}(0) = -\frac{1}{2}e^0 \cdot C_1 \cdot (0 - 5) = \frac{5}{2}C_1,$$
$$\frac{5}{2}C_1 = 5,$$

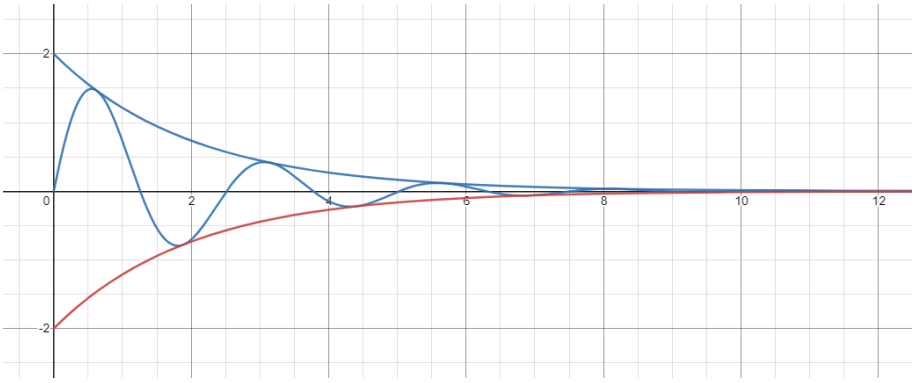
ebből $C_1 = 2$. Tehát a kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldás:

$$x_p(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} sin\frac{5}{2}t.$$

A test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban

$$x_p(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} \cdot sin\frac{5}{2} = 2e^{-\frac{1}{2}} \cdot sin143{,}24° \approx 0{,}726\ (m).$$

Az $x_p(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} sin\frac{5}{2}t$ függvény elemzését bonyolultsága miatt csak a grafikonjából kiindulva végezzük el (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (m)).



A függvény képe egy olyan „szinusz függvény”, amelynek a kitérése az $2e^{-\frac{1}{2}t}$ és $-2e^{-\frac{1}{2}t}$ burkológörbék által meghatározott ütemben exponenciálisan csökken. Összességében az $x_p(t)$ függvény $t \to \infty$ esetén lassan tart nullához, vagyis a rezgés fokozatosan elhal.

4. Összefoglalás

A felsőbb matematika oktatása során hallgatóink − tájékozatlanságuk miatt − gyakran megkérdőjelezik az adott eljárás mérnöki gyakorlatban való alkalmazhatóságát. Elfogadható indoklás nélkül sokan kétségbe vonják a témakör szükségességét. A differenciálegyenletek is olyan fejezet, amelyet bár rengeteg tudományterületen használnak, többnyire csak körülírni, felvázolni tudjuk az alkalmazhatóság lehetőségeit, ugyanis további (fizikai, kémiai, stb.) ismeretekre lenne szükség ahhoz, hogy konkrét példákat adjunk. Fizika tantárgyból a rezgések mozgásegyenleteit a legtöbb felsőoktatási intézményben csak érintőlegesen tárgyalják, leginkább azért, mert a hallgatók matematikai háttértudása hiányos, vagy addigra már nem naprakész. A fenti egyszerű feladat-ötletekkel próbáltam a matematika és fizika tananyag közötti “szakadékot” áthidalni, és a témakör fontosságára rávilágítani.

Irodalomjegyzék

[1] **Budó Ágoston**, Kísérleti fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
[2] **Budó Ágoston,** Mechanika. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.
[3] **Scharnitzky Viktor**, Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
[4] **Pontrjagin, L. Sz.,** Közönséges differenciálegyenletek. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
[5] **Ponomarjov, K. K.**, Differenciálegyenletek felállítása és megoldása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
.

doi:10.20312/dim.2021.05

A háromszög köré- és beírt szabályos háromszögéről

Hajdu Endre
Soproni Egyetem

ÖSSZEFOGLALÓ. Tetszőleges háromszögbe irható szabályos háromszög úgy, hogy a beírt háromszög csúcsai az adott háromszög különböző oldalaira illeszkedjenek. Az ilyen beírt háromszögek közül keressük a legkisebbet, amelyre két új szerkesztési módszert is adunk. Továbbá megmutatjuk, hogy az adott háromszög területe a maximális és a minimális (köré írt, ill. beírt) háromszög területének mértani közepe.

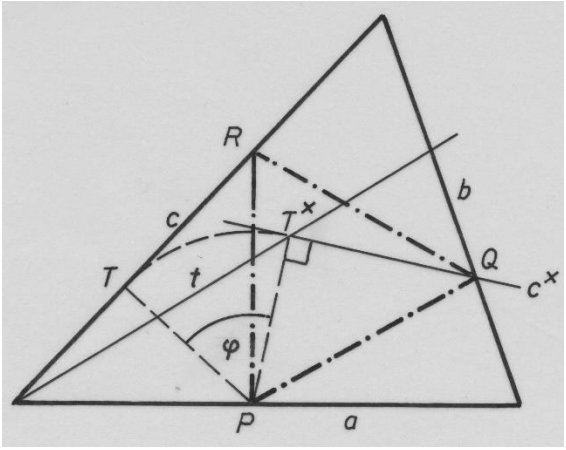
ABSTRACT. For any triangle, there exist an inscribed equilateral triangle, whose vertices are on different sides of the triangle. I give two various methods for constructing the smallest of such inscribed triangles. Moreover, we show that the area of the consider triangle is the geometric mean of the maximal and minimal (circumscribed and inscribed) triangles.

1. Bevezetés

Évtizedek során összegyűlt geometriai följegyzések, feladatok, megoldások átnézése, selejtezése során bukkantam egy régi ötletemre: adott három, nem egy egyenesen lévő pont, szerkesztendő a legnagyobb szabályos háromszög, melynek egy-egy oldala az adott pontok valamelyikét tartalmazza. Ezen a feladaton tűnődve jutottam egy rokon, de minimum keresést jelentő példára: egy tetszőleges háromszögbe hogyan szerkeszthető legkisebb szabályos háromszög, melynek csúcsai az adott háromszög oldalaihoz illeszkednek? Ellentétben a közismertnek mondható, háromszögbe írható legkisebb kerületű háromszög feladatával (talpponti háromszög [1]), ez kevéssé ismert, tárgyalt téma, ezért lehet indokolt a vonatkozó irodalomban [2], [3], [4] talált megoldásoktól különböző alábbi szerkesztéseim ismertetése. A két megoldás közül a második annyiban mondható sajátságosnak, hogy a minimumkeresés céljából egy maximális méretű háromszöget kell előállítani.
A háromszög köré írt legnagyobb szabályos háromszög szerkesztésével és számításával is foglalkozik az anyag. Az adott háromszög területe a másik két háromszög területének mértani közepe.

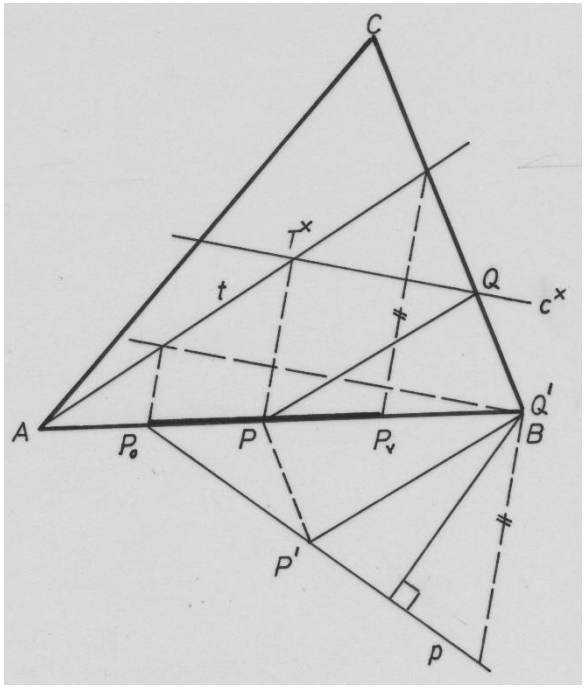
2. Első megoldás

Mint ismeretes, egy adott háromszög valamely a oldalán fölvett P pontját egy szabályos háromszög egyik csúcsául véve, a b oldalon keresett Q csúcsot, a c oldal egyenesének a P körül $\varphi = 60°$-kal elforgatottja jelöli ki az 1. ábra szerinti szerkesztés révén.



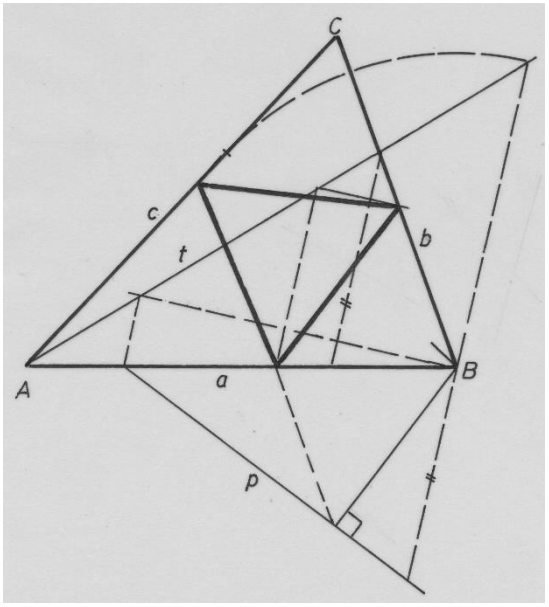
1. ábra

A Q pont ismeretében a PQR szabályos háromszög megszerkesztése már egyszerű. Az a oldalon fölvett P pont helyzetétől függetlenül, a T talppont T^* elforgatottja ugyanarra a t egyenesre esik, a PT^*-ra merőleges c^* egyenes állása is változatlan. Az eredeti föladat az 1. ábra alapján úgy is átfogalmazható, hogy keressük a P pont azon helyzetét, melynél a PT^*Q derékszögű háromszög átfogója a legkisebb, ha P befutja az a oldalt. A 2. ábrából kitűnik, hogy az a oldalnak csak a $P_0 P_v$ darabján jelölhető ki P. A $PQQ'P'$ parallelogrammákhoz tartozó minden P' pont egy egyenesre, a p-re esik. A $P_0 P_v$ szakasz minden P helyzetéhez tartozik egy $Q'P'(Q' \equiv B)$ szakasz, s ezek közül a legrövidebb a p-re merőleges szakasz.



2. ábra

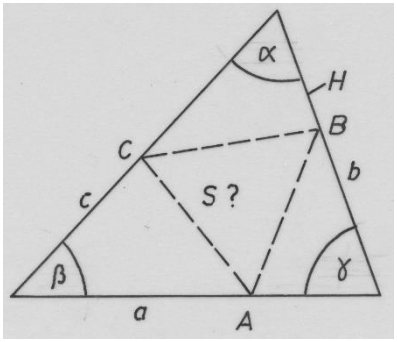
Az eredeti föladat 1. megoldását az imént látottak alapján, a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra

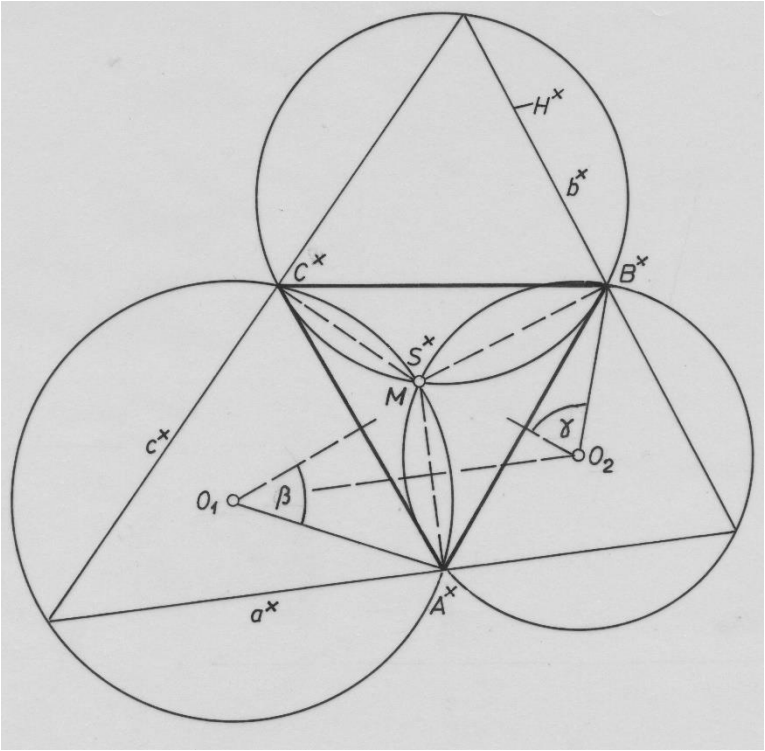
3. Második megoldás

Az előző megoldásban szereplő adott háromszögnek feleljen meg most a 4. ábra *H* háromszöge, az ismeretlen méretű legkisebb beírt szabályos háromszögének pedig *S*. A második megoldás lényege: az *S*-hez hasonló, tetszőleges méretű szabályos háromszöget veszünk föl, melyre a *H* háromszöghöz hasonló, de legnagyobb körülírt háromszöget szerkesztünk, majd a kapott háromszöget az adott *H* méretére kicsinyítjük – vagy nagyítjuk.



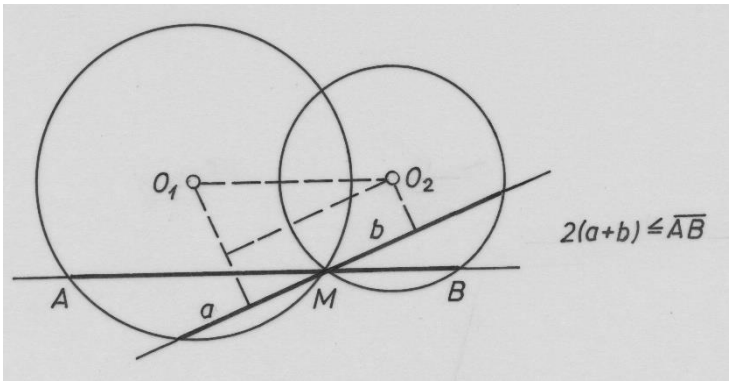
4. ábra

Jelölje most a keresett *S* legkisebb beírt szabályos háromszög tetszőleges méretű megfelelőjét *S**, csúcspontjait *A*B*C**. Az adott háromszög *a* oldala *a** megfelelőjének végpontjai az *A*B** és *A*C** oldalakra szerkesztett γ ill. β szögű látóköríveken keresendők, azzal a föltétellel, hogy egymástól mért távolságuk a lehető legnagyobb legyen, mert ha a fölvett szabályos háromszög a köré írt háromszög legkisebb szabályos háromszöge, akkor a beírt háromszöghöz képest a köré írt háromszög maximális (5. ábra).



5. ábra

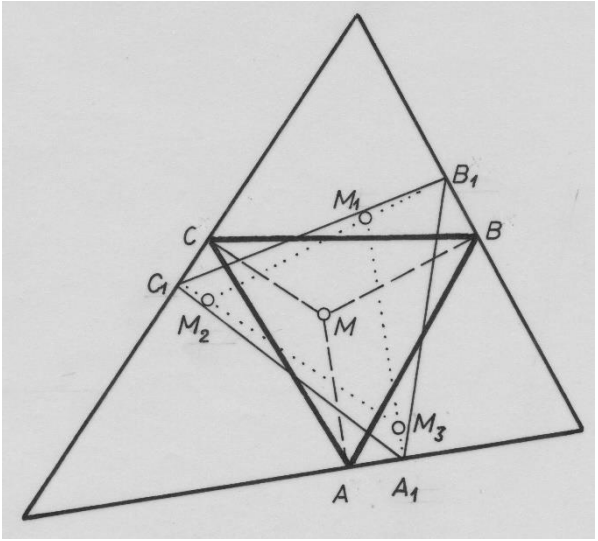
Ez utóbbi a részfeladatnak a megoldása a 6. ábrából következik: két egymást metsző kör egyik M metszéspontján átmenő egyenesnek a körök által határolt darabja $2a+2b$ hosszúságú, ahol $2(a+b)$ akkor a legnagyobb, ha az egyenes párhuzamos a kör-középpontokat összekötő egyenessel. Az 5. ábrán e feltétel alapján szerkesztett a^* egyenes kimetszi a látókörívek megfelelő pontjait, az S^* háromszög köré írt legnagyobb és kívánt alakú háromszögének csúcspontjait. Megemlítendő, hogy az S^* háromszög oldalaira szerkesztett látókörívek egy M pontban metszik egymást, mely pont egyben az $A^*B^*C^*$ pontokban a H^* oldalaira állított merőlegesek közös pontja is. A keresett H háromszög az 5. ábra olyan kicsinyítésével adódna, melynél a 4. ábrával azonos alakzatot kapnánk.



6. ábra

A kicsinyítést mellőzve még egy figyelemre méltó mozgásgeometriai tényre érdemes rámutatni (7. ábra). Ha a keresett háromszögön kívül egy másik beírt szabályos háromszöget is megrajzolunk, ami már nagyobb persze, mint a vastagon rajzolt legkisebb, fölvethető a kérdés:

elmozgatható-e a beírt háromszög úgy, hogy két csúcsa a megfelelő támaszoldalon marad? Az új háromszög A_1B_1 csúcsa a körülírt háromszög megfelelő oldalain akkor indulhat mozgásnak, ha a momentáncentrum M_1. Ha a B_1C_1 szakaszát mozgatnánk, a momentáncentrum az M_2 lenne. A C_1A_1-hez az M_3 tartozna; mi a helyzet a legkisebb beírt háromszöggel? Egyetlen M momentáncentrum adódik, mert mint láttuk korábban, a legkisebb beírt háromszög esetén a momentáncentrumot kijelölő egyenesek egy pontban metsződnek. Az M pont körül mindkét forgásirányban elforgatható a beírt legkisebb háromszög, míg az egyéb szabályos beírt háromszögek csak egy forgásirányban.

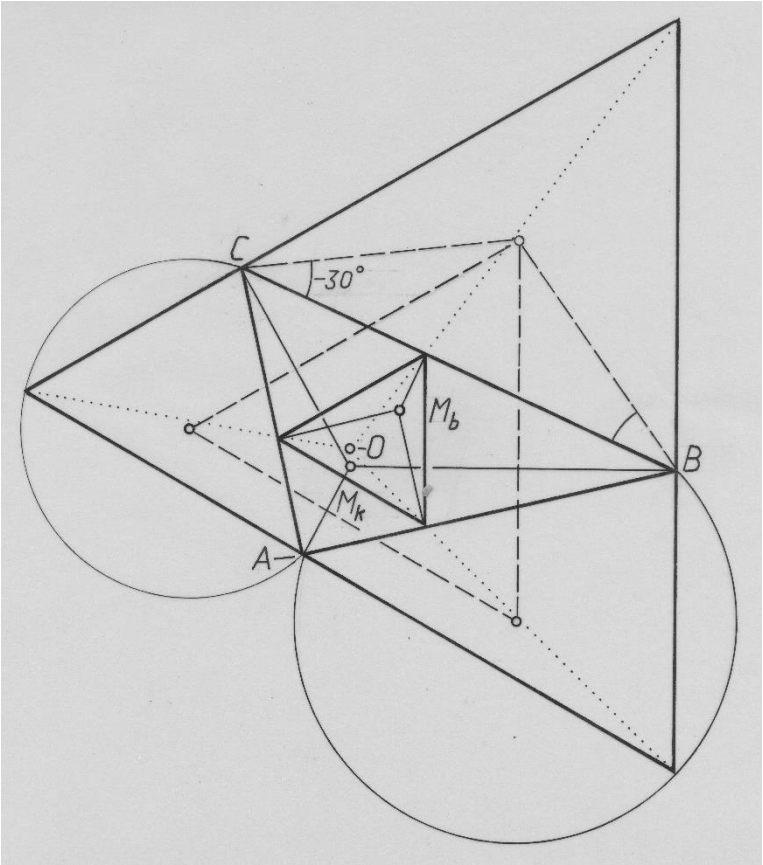


7. ábra

A háromszögbe beírható legkisebb szabályos háromszög szerkesztésénél könnyebb föladat a háromszög köré írt legnagyobb szabályos háromszög szerkesztése; az egyik lehetséges megoldást az 5. ábrán már látott módszer alkalmazását jelenti. Az *AB,* ill. *AC* oldalhoz tartozó, 60° látószögű körívek középpontjainak összekötő szakaszával párhuzamos és az *A* ponthoz illeszkedő egyenes metszi ki a látókörívekből a keresett legnagyobb, köré írt szabályos háromszög két csúcspontját (8. ábra).

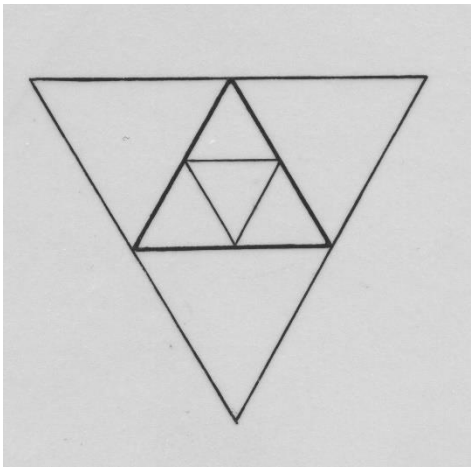
A maximális méretű, köré írt háromszög oldalai párhuzamosak a beírt szabályos háromszög oldalaival, s egyben párhuzamosak azzal a háromszöggel is, melynek csúcsai az adott háromszög oldalaira kifelé szerkeszthető szabályos háromszögek középpontjai. E tény az 5. ábrán alkalmazott, látókörívekkel kapcsolatos szerkesztési módszer alapján látható be. A beírt és a köré írt szabályos háromszög között párhuzamos és centrális hasonlóság áll fenn, az utóbbi centruma *O*. A legnagyobb köré írt háromszög esetén is érvényesek a 7. ábrával kapcsolatban említett tulajdonságok: a csúcsponti támasznormálisok egy pontban metszik egymást, az M_b belső és az M_k külső metszéspontok általános esetben nem esnek egybe. E pontok körül a fixnek tekintett *ABC* háromszöghöz képest a belső háromszög forgatható el M_b körül, míg a köré írt háromszög az M_k körül, az óra mutató járásával egyező vagy ellentétes forgásirányban. További figyelemre méltó tény, hogy a beírt és köré írt szabályos háromszögek T_b , T_k , valamint az adott háromszög T_h területe között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\frac{T_k}{T_h} = \frac{T_h}{T_b} = q.$$



8. ábra

Az adott háromszög területe tehát a beírt, és a köré írt szabályos háromszögek területének mértani közepe, vagyis $T_h = \sqrt{T_b T_k}$. A q hányados függ az adott háromszög alakjától, legkisebb értéke 4, de lehet bármekkora is. Az elmondottakra legegyszerűbb példa egy szabályos háromszögbe írt és köré írt szabályos háromszöget szemléltető 9. ábra.



9. ábra

Az adott és a szabályos háromszögek terület-hányadosaira vonatkozó tétel bizonyítására vonatkozó számításokat mellőzve, az eredmények a következők: egy *ABC* háromszög *a, b*

oldalhosszait és az oldalak által bezárt γ szöget ismerve, az adott háromszög területe $T_h = \frac{ab\sin\gamma}{2}$. A háromszög köré írt legnagyobb szabályos háromszög oldalhossza

$$L = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60^\circ)}}{\sqrt{3}}.$$

E háromszög területe

$$T_k = L^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60^\circ)}{\sqrt{3}}.$$

A legkisebb beírt szabályos háromszögnek az oldalhossza

$$l = \frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60^\circ)}},$$

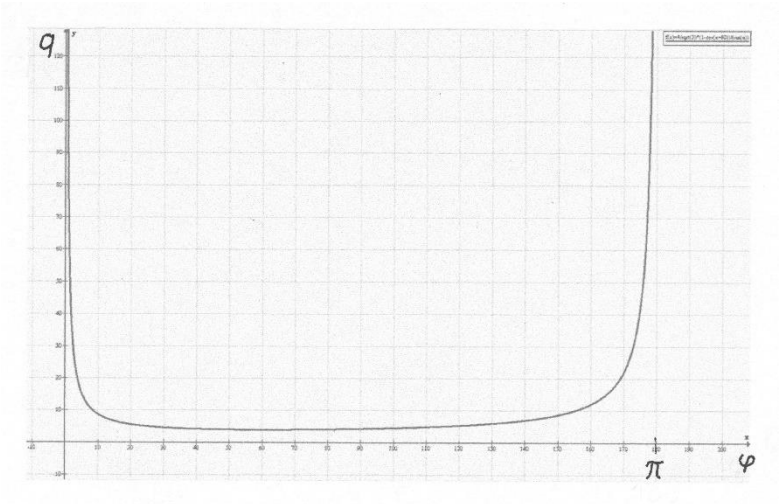
területe

$$T_b = \frac{\sqrt{3}\,a^2b^2\sin^2\gamma}{4\left[a^2 + b^2 - 2ab\,\cos(\gamma + 60^\circ)\right]}.$$

A három háromszögre vonatkozó területhányadosok közös értéke

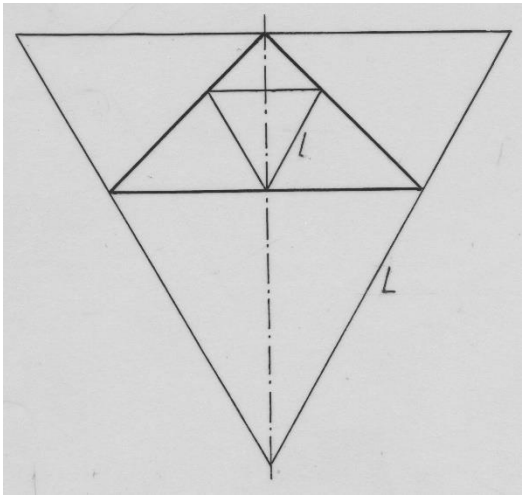
$$q = \frac{2\left[a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60^\circ)\right]}{\sqrt{3}\,ab\sin\gamma}.$$

A hányados alakulását a φ szög függvényében ($a = b$ esetén) a 10. ábra szemlélteti.



10. ábra

A 11. ábra derékszögű egyenlő szárú háromszögére $q \approx 4{,}309$.



11. ábra

Irodalomjegyzék

[1] **H. Rademacher – O. Toeplitz**: Számokról és alakzatokról, Typotex, Budapest, 2010.
[2] **Reiman István**: Elemi geometriai példatár Tankönyvkiadó Budapest, 1963.
[3] Inscribed equilateral triangle, http://mathafou.free.fr/pbg_en/sol143.html.
[4] Art of Problem Solving, AoPs Online, AoPS Wiki, 2017 AIME I Problems/Problem 15, https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2017_AIME_I_Problems/Problem_15.

doi:10.20312/dim.2021.06

Matematikai kiegészítések a harmonikus rezgőmozgás tárgyalásához

Barta Edit
Soproni Egyetem Informatikai és Matematikai Intézet
barta.edit@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Matematika és fizika oktatóként gyakran tapasztalom, hogy az a tudásbázis, amelyet a hallgatók középiskolából magukkal hoznak, majd az egyetemen a matematika kurzusokon elsajátítanak, kevésnek bizonyul ahhoz, hogy a komolyabb matematikai eszközöket is alkalmazó szakmai tárgyak némely levezetését megértsék. A számos eset közül most speciálisan a harmonikus rezgőmozgás kapcsán felmerülő matematikai megértési problémákhoz szeretnék segítségként néhány kiegészítést nyújtani.

ABSTRACT. It is often the case that the mathematical background of our university students is insufficient to understand the topics of certain subjects. A typical example of this is the harmonic oscillatory motion in physics. We provide some additional information to help in discussing it.

1. Bevezetés

E cikk megírására egy személyes emlék motivált. Immár több mint húsz éve, egyetemünk akkori Fizika-Elektrotechnika Tanszékén PhD-hallgatóként magam is bent ültem Papp György professzor úr Fizika I. tárgyának előadásain. Egyik alkalommal helyettesítenem kellett őt, és éppen a csillapított harmonikus rezgőmozgás témáját kellett előadnom az akkori hallgatóságnak. Segítségként megkaptam az ő saját kézzel írott jegyzeteit, amelyben a téma kemény matematikai tárgyalással szerepelt. Megértése sokkal komolyabb matematikai előismereteket igényelt, mint amit a hallgatók akkor (és most) a matematika kurzusokon elsajátíthatnak. A három rezgéssel kapcsolatos téma (harmonikus rezgőmozgás, csillapított rezgések, kényszerrezgések) differenciálegyenletének megoldása sokban eltért a matematika órákon tanult módszerektől, és a komplex számok mélyebb ismeretét (pl. az Euler-alakkal való számolást), a komplex függvénytanban való alapjártasságot is igényelt volna. Nem véletlen hát, hogy éveken át ez a három tétel volt az, amelyet a legtöbb hallgató visszaadott a vizsgán, ha véletlenül közülük húzott. (Holott a teljes levezetés kihagyásával, csak magának a differenciálegyenletnek a felírásával és a megoldásként kapott kinematikai mozgásegyenletek elemzésével is szép osztályzatot lehetett kapni.)

Akkortájt fizikát és matematikát is oktattam, aztán évekig csak fizikát, s most néhány éve csak matematikát. Volt alkalmam belelátni néhány tantárgy (fizika, elektrotechnika, mechanika tantárgyai) matematikai módszereibe. A tapasztalatom az, hogy azon témák esetén, amelyek matematikai levezetéseket is igényelnek, módszereiket tekintve sokszor eltérnek a matematikából tanultaktól. Az egyik esetben a levezetésekre nem fektetnek túl nagy hangsúlyt, azokat átugorva legfeljebb hivatkoznak rá, hogy „a matematikából tanult módon” ez és ez a végeredmény adódik, vagy csak az eredményt közlik, majd a „behelyettesítéssel meggyőződhetünk ennek helyességéről” kijelentéssel lépnek tovább. Ilyenkor annak ellenére,

hogy matematikából hivatkozunk rá, hogy az éppen tanított anyag hol kerülhet elő a gyakorlatban, de legalább is további tanulmányaik során, a hallgatónak az a téves érzete támadhat, hogy a matematikára nincs is szükség a szakmai életben. A másik eset ennek ellenkezője, amikor a levezetés nagyobb matematikai alaptudást igényelne, mint amellyel a hallgató rendelkezik. Így az elhangzottakat nem tudja már meglévő ismerethez kötni, az új anyag „lóg a levegőben", a levezetés megértése helyett kénytelen azt bemagolni. Az így megszerzett tudásból aztán hiányzik az az algoritmikus gondolkodásmód, amely lehetővé teszi, hogy más hasonló problémákra is alkalmazni tudjuk.

Terjedelmi okokból nincs lehetőségem mindazon hiányosságok bemutatására, amelyek egyetemünk hallgatói számára nehézzé teszik egy-egy téma megértését. A fenti személyes emlék miatt a harmonikus rezgőmozgás, mint oktatandó téma kicsit a szívemhez nőtt. Ezért ehhez a témához kapcsolódóan szeretnék rámutatni azokra a hiányzó matematikai anyagrészekre, amelyek jelenleg nem szerepelnek a tananyagban, ismeretük viszont elengedhetetlen a tárgyalásmód megértése szempontjából.

2. A harmonikus rezgőmozgás szokásos matematikai leírásai

2.1. Kinematikai tárgyalásmód – a középiskolákból hozott ismeret

A harmonikus rezgőmozgásról szinte mindenkinek a rugóra akasztott test mozgása jut eszébe. Maradjunk is ennél az egyszerű esetnél, amikor a tömegpont egy egyenes mentén végez rezgést. Középiskolákban a mozgás kinematikai leírása során a kitérés-idő, a sebesség-idő és a gyorsulás-idő függvényeket azon felismerés alapján vezetik le, hogy minden rugóra akasztott test mozgásához hozzárendelhető egy olyan egyenletes körmozgás (az ún. referencia körmozgás), amelynél a körmozgást végző pontnak és a rugón mozgó pontnak a körpálya síkjába eső függőleges egyenesre eső vetületei egybeesnek. Vagyis a rugóra akasztott test kitérés-, sebesség- és gyorsulás-idő függvényei megegyeznek az egyenletes körmozgást végző pont vetületének ugyanezen függvényeivel. A mozgások összehasonlítására a világhálón több bemutató anyag is található (pl. [1], [2]), s a levezetések is több tankönyvben olvashatók (pl. [3], [4], [5]). Ezek alapján a rugóra akasztott test kitérés-idő függvénye:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{1}$$

ahol A a mozgás **amplitúdó**ja, vagyis a maximális kitérés, ω a referencia körmozgás szögsebessége, amit a harmonikus rezgőmozgásnál **körfrekvenciá**nak nevezünk, φ_0 pedig a **fázisállandó**, más néven **kezdőfázis**. Ez utóbbi függ attól, hogy a mozgást mely időpillanatban kezdjük vizsgálni. A szinusz argumentuma a mozgás **fázis**a. Itt vezetik be a **rezgésidő** vagy **periódusidő** és a **frekvencia** fogalmát és kifejezéseit is. Ez a harmonikus rezgőmozgás kinematikai megközelítése, azok az összefüggések, amelyeket a középiskolából jött hallgatók magukkal hoznak, ismernek.

Mitől „harmonikus" ez a rezgés? Pontosan attól, hogy a kitérés az idő szinuszos függvénye. A harmonikus rezgést más néven szinuszrezgésnek is nevezik (ld. [6] 37. old.) Tágabb értelemben **harmonikus rezgés**ről akkor beszélünk, ha a mozgás valamely jellemzője, például a koordináta az időnek szinuszos vagy koszinuszos függvénye ([7] 8. old.). Ezek alapján bármely fizikai mennyiség, amelynek időbeli változását az

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ vagy az } x(t) = B\cos(\omega t + \varphi_0)$$

kifejezés valamelyike írja le, harmonikus rezgést végez. Az $x(t)$ nem csak a rugóra akasztott test kitérése lehet, hanem többek között a matematikai (fonál-) és a fizikai inga szögkitérése, a

torziós inga elcsavarodási szöge, váltakozó áramú hálózatoknál az áramerősség vagy a feszültség, a kondenzátorlemezeken tárolt töltésmennyiség vagy a lemezek közötti elektromos térerősség, a tekercsben felépülő mágneses indukció, stb. Ezekben a mennyiségekben az a közös, hogy hasonló matematikai apparátussal írhatók le, vagyis ha egyet megtanultunk közülük, akkor annak analógiájára a többit is hasonlóan lehet tárgyalni.

2.2. Dinamikai tárgyalásmód és annak matematikai kiegészítése

Először szögezzük le, hogy a továbbiakban is csak az úgynevezett egy szabadságfokú mechanikai harmonikus rezgésekről lesz szó, amikor a pontszerűnek tekintett test egy egyenes mentén mozdul el, és ennek is azzal a legegyszerűbb esetével foglalkozunk, amikor a rezgőmozgást végző pontra nem hat sem csillapító, sem kényszererő. Ezt a mozgást csillapítatlan szabadrezgésnek is nevezik.

A mozgás vizsgálatát a dinamika alapegyenletéből kiindulva végezzük. Ez a tárgyalási mód egyik szép példája a másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek alkalmazásának, melyet a Matematika 1. tantárgy előadásán be is mutatunk ([8], 72-73. old.). Hogy az anyagot egyben lássuk, fussunk most át ezen a levezetésen!

A rugó legyen vízszintes helyzetű, a hozzá rögzített tömegpont pedig súrlódásmentes felületen mozogjon. Egyensúlyi helyzetben a test nyugalomban van, a rugó nyújtatlan. Az x-tengelyt célszerű a rugó hosszirányában, kezdőpontját pedig a test egyensúlyi helyzetében felvenni. Ha a testet kitérítjük ebből a helyzetéből, megnyújtva (vagy összenyomva) ezzel a rugót, akkor rá egy a kitéréssel arányos, vele ellentétes irányú erő hat, melynek alakja

$$F = -Dx,$$

ahol D -t most nevezzük rugóállandónak. (Megjegyzés: D elnevezése nem egységes a szakirodalmakban, tankönyvekben. Bosznay a [7] 16-17. oldalán c-vel jelölve D reciprokát használja a képletben és azt nevezi rugóállandónak. [6] 71. oldalán a lineáris erőtörvényben már a D jelölést találjuk direkciós erő megnevezéssel, míg a rugóállandó kifejezést itt is ennek reciprokaként említi. Az újabb [4] tankönyv 19. oldalán szintén csak a D jelölés fordul elő a reciprok megemlítése nélkül, direkciós állandónak nevezve azt, és zárójelben, mintegy szinonimaként teszi mellé a rugóállandó kifejezést.) Elengedve a testet a kitérés időben változni fog. A cél a kitérés időbeli függésének, azaz az $x(t)$ függvénynek a megadása. Newton II. törvénye ($\sum F = ma$) alapján felírva a dinamika alapegyenletét, figyelembe véve, hogy a gyorsulás a kitérés idő szerinti második deriváltja ($a = \ddot{x}$), az

$$m\ddot{x} = -Dx$$

differenciálegyenlethez jutunk. A tömeggel leosztva, az egyenletet átrendezve és bevezetve az $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ jelölést, kapjuk az

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2}$$

másodrendű, lineáris, állandó együtthatós homogén differenciálegyenletet. Eddig volt a fizika, most jön a matematika. A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0, \tag{3}$$

melynek megoldása egy komplex konjugált gyökpár:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega. \tag{4}$$

Ezzel a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \tag{5}$$

A végeredményt a [8] jegyzet egy speciális kezdeti feltétel esetén adja meg, nevezetesen amikor az időt a test elengedésének pillanatában kezdjük mérni. Ekkor a kitérés maximális, azaz A, a sebesség pedig nulla. Ezzel a kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A \cos(\omega t).$$

A példa eddig tart. A levezetés didaktikailag is korrekt, hiszen minden lépés csak olyan ismereteket igényel, melyet a hallgatóknak előtte már átadtunk illetve középiskolában már átadtak. Abban a hallgatóban, aki még emlékszik a középiskolában tanult (1) összefüggésre, felmerülhet a kérdés, hogy miért nem azt kaptuk meg. Válaszként mondhatjuk, hogy a „koszinusz függvény is szinusz, csak el van tolva π/2-vel” (gondoljunk a két szögfüggvény grafikonjára és a függvénytranszformációkról tanultakra!), vagyis ez a megoldás átírható az

$$x(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

alakra, ahol π/2 a kezdőfázis. Ha a témát továbbra is didaktikusan kívánjuk tárgyalni, akkor meg kell mutatnunk azt is, hogy nem csak ennél a speciális indításnál, hanem tetszőleges kezdeti feltételek esetén is az (1)-gyel megegyező alakú kitérés-idő függvényt kapunk. Ehhez a kezdeti feltételeket a következő általános alakban vegyük fel:

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ v(0) &= \dot{x} = v_0 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

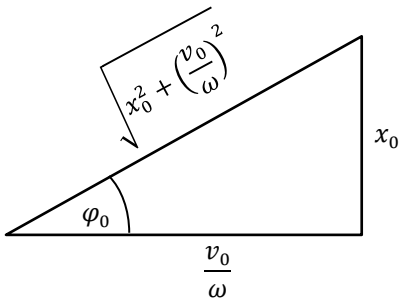
A $t = 0$-t behelyettesítve az (5) általános megoldásba $c_1 = x_0$ adódik. Ezt behelyettesítve ugyanoda, majd deriválva a kifejezést kapjuk a sebességet:

$$\dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) + \omega c_2 \sin(\omega t).$$

Ebbe helyettesítve a sebességre vonatkozó kezdeti feltételt $c_2 = \frac{v_0}{\omega}$ adódik. Ezzel a (2) differenciálegyenlet megadott általános kezdeti feltételeket is kielégítő partikuláris megoldása:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \tag{7}$$

Ez a mozgásnak sem az amplitúdójáról, sem a kezdőfázisáról egyelőre még nem árul el semmit, viszont azok lényegesebb információt hordoznak a mozgásról, mint az, hogy egy önkényesen választott 0 időpontban mennyi a kitérés és a sebesség. Ez is indokolja a kifejezés átalakításának szükségességét, méghozzá didaktikai okok miatt olyan eszközök használatával, amelyeknek a hallgató feltehetően már birtokában van. Ehhez hajtsunk végre egy egyszerűen megérthető trigonometrikus átalakítást! Tekintsük az 1. ábrán látható derékszögű háromszöget, amelynek két befogója a (7) kifejezés jobb oldalán a szinusz és koszinusz függvények együtthatói, az x_0 oldallal szemközti szög pedig legyen φ_0. Ekkor Pitagorasz tétele alapján az átfogó $\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$ lesz.



1. ábra.

Az ábrából az is látható, hogy

$$\sin\varphi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}, \text{ és } \cos\varphi_0 = \frac{\frac{v_0}{\omega}}{\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}. \tag{8}$$

Emeljük ki a (7) egyenlet jobb oldalán az átfogónak megfelelő kifejezést, majd helyettesítsük be az együtthatók helyére (8) alapján a φ_0 szögfüggvényeit!

$$x(t) = \sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}\cos(\omega t) + \frac{\frac{v_0}{\omega}}{\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}\sin(\omega t)\right),$$

$$x(t) = \sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\,[\sin\varphi_0\cos(\omega t) + \cos\varphi_0\sin(\omega t)].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés (ld. Függvénytáblázat vagy az Intézet által kiadott Képletgyűjtemény) éppen $\sin(\omega t+\varphi_0)$, az átfogónak megfelelő kifejezést pedig A-val jelölve (1)-et kapjuk. Tehát a kezdeti feltételekből a mozgás amplitúdója és kezdőfázisa az alábbi két összefüggéssel határozható meg:

$$A = \sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{x_0}{\frac{v_0}{\omega}} = \frac{x_0\omega}{v_0}.$$

Megjegyzés: Az előbbi gondolatmenet az alábbi trigonometrikus azonosság levezetésének egy speciális esete:

$$a\cos\gamma + b\sin\gamma = c\sin(\gamma+\alpha),$$

ahol

$$c = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Felmerülhet az a kérdés is, hogy ha eddig a rugóra akasztott test mozgását úgy figyeltük meg, hogy a rugó függőleges helyzetű volt (nyilván, hiszen így a legegyszerűbb bemutatni a rezgést), akkor miért nem így tárgyaljuk a dinamikáját is. Tárgyalhatnánk így is, mint ahogyan

a [9] videóban Papp György is tárgyalja, de akkor a mozgó testre nem csak a rugóerő hat, hanem az mg nagyságú, lefelé irányuló nehézségi erő is. Ezzel együtt kell felírni a dinamika alapegyenletét úgy, hogy most az x-tengely kezdőpontját nem a rugó nyújtatlan állapotában, hanem a test egyensúlyi helyzetében vesszük fel. Egyszerűsítések után a megoldandó differenciálegyenlet ugyanaz lesz, mint a vízszintes esetben volt, csak a rezgés középpontja tolódik el a nyújtatlan állapotból az egyensúlyi állapotba.

Hallgatóink legközelebb közel fél év múlva találkoznak újra a harmonikus rezgőmozgással, immár fizika órákon. Itt a [9]-hez hasonló élvezetes előadásban lehet részük, de ugyanezt a levezetést megtalálhatjuk a [10] és [11] interneten elérhető tananyagokban is.

Itt az előadó illetve a szerzők a differenciálegyenlet megoldásának mélyebb szintjére nyúlnak vissza. Hallgatóinknak mindössze annyi előismerete van, hogy az $y(x)$ függvényre felírt másodrendű, lineáris, állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet megoldása során a karakterisztikus egyenlet két valós (λ_1 és λ_2), egy valós (λ) vagy két komplex ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$) gyökét e három esetnek megfelelően rendre az

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{9}$$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \tag{10}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}[c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)] \tag{11}$$

képletekbe kell behelyettesíteni ([8] 71-72. old.). Az, hogy miért, annak levezetése ma már nem képezi a matematika tárgy anyagát. Több mint tíz évvel ezelőtt, amikor még magasabb óraszámban hallgathatták egyetemünk hallgatói a matematikát, a második szemeszterben oktatott Matematika II. tárgy akkor használatos jegyzetében a levezetés szerepelt ([12] 265-267. old.), és számonkért tananyag volt. Habár a differenciálegyenletek oktatása már akkor sem feltétlenül előzte meg azokat a fizika előadásokat, ahol már alkalmazásuk is előkerült, tehát a megértést legfeljebb utólag segíthette. Sajnos a több mint tíz éve tartó ismételt oktatás átszervezések, tantervi háló módosítások és a matematika tárgyainak, óraszámainak folyamatos és drasztikus csökkentése révén sok értékes és hasznos tananyag kikerült az oktatott témák közül. Többek között a (9)-(11) képletek levezetése és a komplex számok Euler-alakja is. Az utóbbi egyik fontos alapismeret az előbbi megértéséhez. Így a fizika előadáson elhangzókhoz hiányoznak azok az előismeretek, amelyek alapján a hallgató követni tudná az ottani gondolatmenetet. A [9]-ben elhangzó és [10], [11]-ben olvasható levezetést szeretném most kiegészíteni, remélve, hogy ez segítséget jelent a hallgatóknak a könnyebb megértéshez.

A kérdés végeredményben az, hogy hogyan kapjuk a (3) karakterisztikus egyenlet két komplex gyökéből az (5) függvényt mint a (2) egyenlet általános megoldását? A problémát vizsgáljuk kicsit általánosabban, amikor is a kiinduló differenciálegyenletből nem hiányzik a keresett függvény első deriváltjával arányos tag sem. Annál is inkább indokolt ez a bővebb vizsgálat, mivel a csillapított rezgések egyik típusának is pontosan ilyen alakú a mozgásegyenlete. Általánosan egy $x(t)$ függvényre felírt másodrendű, lineáris, állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet megoldását az

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

alakban keressük. Ennek kétszeri deriválásával és a kiinduló egyenletbe való behelyettesítésével, $e^{\lambda t}$ kiemelésével kapjuk a karakterisztikus egyenletet, melynek a megoldása abban az esetben, ha a diszkrimináns negatív, két komplex szám, amelyek egymásnak konjugáltjai. Általános alakjuk:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i.$$

Így az $e^{\lambda t}$ alakban keresett két független megoldás

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t) &= e^{(\alpha+\beta i)t}, \\ \bar{x}_2(t) &= e^{(\alpha-\beta i)t}. \end{aligned} \tag{12}$$

A felülvonás arra utal, hogy a megoldások komplex függvények.

A hallgatóban joggal merül fel a kérdés, hogy hogyan értelmezzük ezeket a kifejezéseket. Itt merül fel a komplex számok Euler-alakja ismeretének az igénye.

Kitérő: A komplex számok Euler-alakja. Ehhez az e^x függvény MacLaurin-soráig kell visszanyúlnunk ([8] 35. old.):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Ebből a sorból származtathatjuk az e^{ix} sorát ([13] 105. old. és pl. [14] 152. old.) oly módon, hogy a sorban x helyére ix-et írunk:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots.$$

A számlálókban tényezőnként elvégezzük a hatványozást. A páros kitevőjű hatványokat tartalmazó tagok valósak lesznek váltakozó előjellel, aszerint, hogy az i kitevője néggyel osztva 2 vagy 0 maradékot ad-e. A páratlan kitevőjű tagok együtthatói viszont $+i$ vagy $-i$ lesznek, attól függően, hogy a kitevő néggyel osztva 1 vagy 3 maradékot ad-e.

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} \pm \cdots.$$

Ez alapján a sor felírható egy csak valós és egy csak képzetes tagokat tartalmazó részsor összegeként:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots\right).$$

Az első zárójelben (valós tagok) szereplő sor éppen a $\cos x$, a második zárójelben (képzetes tagok) lévő sor pedig a $\sin x$ függvény MacLaurin-sora:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{13}$$

Ezt az összefüggést **Euler-egyenlet**nek hívjuk ([14] 152-153. old.) Ez alapján az $e^{\alpha+\beta i}$ exponenciális alakban megadott komplex szám a következő módon írható fel trigonometrikus alakban:

$$e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta).$$

Az e^{α} pozitív valós szám éppen a komplex szám abszolút értéke, β pedig az argumentuma. Ezeket rendre a szokásos r-rel és φ-vel jelölve a trigonometrikus és az exponenciális alak közötti összefüggés felírható az

$$r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

alakban. A jobb oldalon szereplő exponenciális alakot nevezik a komplex számok **Euler-alak**jának.

Mindkét alak a szám abszolút értékéről és argumentumáról hordoz információt. Az Euler-alakkal a komplex számok szorzására, osztására, hatványozására vonatkozó szabályok annyival egyszerűbben levezethetők, mint amennyire az azonos alapú hatványokra vonatkozó azonosságok egyszerűbbek a trigonometrikus azonosságoknál. Előnye még, hogy alkalmazásához kevesebb karakter leütése (leírása) szükséges.

Szakirodalmakban a szinuszosan váltakozó mennyiségek komplex számokkal történő leírása esetén egyszerűbb kezelése miatt gyakrabban alkalmazzák az Euler-alakot, mint a trigonometrikust (ld. pl. [7] 9-10. old. és [14] 38. old.).

A matematikai kitérő után térjünk vissza a lineáris differenciálegyenlet (12) szerinti két független megoldására. Ezek a következő alakban írhatók fel:

$$\bar{x}_1(t) = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)],$$
$$\bar{x}_2(t) = e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}[\cos(-\beta t) + i\sin(-\beta t)] = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)].$$

A második megoldásnál kihasználtuk a koszinusz függvény páros, a szinusz függvény páratlan voltát. Ha egy komplex függvény megoldása a valós együtthatós lineáris egyenletnek, akkor [12] 267. oldala alapján annak valós és képzetes része külön-külön is megoldásai az egyenletnek. Így a két független, most már valós megoldás:

$$x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$
$$x_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,.$$

Ezek lineáris kombinációi adják a kiinduló differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x(t) = e^{\alpha t}[c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)],$$

ami éppen a (11) összefüggés. A csillapítatlan szabadrezgés (2) mozgásegyenlete (3) szerinti karakterisztikus egyenletének (4) komplex gyökeinek zérus a valós része, így a két független megoldásból az exponenciális tényező kiesik, így kapjuk (5)-öt általános megoldásként.

A [9] előadáson a lineáris differenciálegyenlet általánosan levezetett végképletébe való behelyettesítés helyett egy másik gondolatmenettel jutunk a harmonikus rezgőmozgás (1) végeredményéhez. A karakterisztikus egyenlet (4) szerinti két komplex megoldását egyből az $e^{\lambda t}$ alakban keresett megoldásba helyettesítjük, és ezek lineáris kombinációiként keressük az adott kezdeti feltételeket is kielégítő valós megoldást:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \tag{14}$$

Az így felírt általános megoldásban viszont a konstansoknak is komplexeknek kell lenniük, hogy a végeredmény valós legyen, ami hallgatóink számára meglepő lehet, hiszen ilyesmivel nem találkoztak matematika órákon.

A konstansok meghatározása kétféle módon is történhet. Az egyik az, ahogyan a fizika előadáson láthatjuk. Ez esetben a két konstanst a

$$c_1 = \frac{a}{2i}e^{i\alpha}$$
$$c_2 = -\frac{a}{2i}e^{-i\alpha}$$

alakban vesszük fel. Miért? Mert ez vezet célhoz. Ez is „lóg a levegőben”, egyszerűen be kell magolni az alakot. Ezt (14)-be helyettesítve, a-t kiemelve, az exponenciális tényezőket összevonva, végül felhasználva a

$$\left.\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

azonosságok közül az utóbbit, adódik az

$$x(t) = a\sin(\omega t + \alpha)$$

partikuláris megoldás. Ez alakilag ugyanaz, mint (1), a -val az amplitúdót, α-val a kezdőfázist jelöltük.

Az a kis hiányosság van még a levezetésben, hogy a matematikai „emlékeztető”-ként felírt (15) azonosságok szintén nem fordulnak elő matematika órán, tehát elvileg nem tekinthetjük ismertnek. A (13) Euler-egyenletet e^{-ix}-re is felírva az

$$\left.\begin{aligned}e^{ix} &= \cos x + i\sin x\\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x\end{aligned}\right\}$$

két egyenlet adódik. Ezeket összeadva és kivonva egymásból, és a kapott egyenleteket rendre 2-vel és 2i-vel elosztva kapjuk a (15) azonosságokat.

A (14) általános megoldásban a c_1 és c_2 konstansokat az elsőre talán légből kapottnak tűnő felvétel helyett a már ismertetett módon a (6) szerinti

$$\left.\begin{aligned}x(0) &= x_0\\ v(0) &= v_0\end{aligned}\right\}$$

két kezdeti feltétel behelyettesítésével is meghatározhatjuk. Az első feltételből a

$$c_1 + c_2 = x_0 \tag{16}$$

egyenlet adódik. A második feltétel felhasználásához (14)-et deriválva kapjuk a sebességet:

$$v = \dot{x}(t) = c_1 i\omega e^{i\omega t} - c_2 i\omega e^{-i\omega t}.$$

Ebbe helyettesítjük be a második feltételt, amire a

$$c_1 - c_2 = \frac{v_0}{i\omega} = -\frac{v_0}{\omega}i$$

egyenlet adódik. Ezt és (16)-ot mint egyenletrendszert megoldva kapjuk a két konstanst:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega}i\\ c_2 &= \frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega}i.\end{aligned}$$

Ezeket a (14) általános megoldásba helyettesítjük, az exponenciális tényezőket átírjuk trigonometrikus alakba, majd a beszorzásokat elvégezve, összevonva pontosan a (7) partikuláris megoldást kapjuk. Innen az amplitúdóval és kezdőfázissal megadott megoldást a fent ismertetett átalakítással tehetjük meg.

Ezekkel a kiegészítésekkel remélhetőleg sikerült a harmonikus rezgőmozgás tárgyalása során ismertetett levezetéseket érthetőbbé tenni, az ehhez szükséges matematikai ismereteket kipótolni.

Megjegyzés: Most ugyan csak a rugóra akasztott test mozgását vizsgáltuk, de ugyanúgy harmonikus rezgőmozgás alakul ki minden, a rugóerőhöz hasonló alakú erő hatására. Ezeknek az erőknek többféle megnevezése ismert: rugalmas erő, harmonikus erő, kvázielasztikus erő. Ha a lineáris harmonikus rezgőmozgást általánosabban akarjuk tárgyalni, akkor a rugóra jellemző rugóállandó D jele helyett gyakran alkalmazzák a k jelölést mint arányossági tényezőt ($F = -kx$), amely mozgástípustól függően más és más fizikai tartalommal bír. Bármilyen harmonikus rezgést vizsgálunk is, a mozgás differenciálegyenlete minden esetben (2) alakúra hozható. Az állítás fordítva is igaz, minden olyan mozgás, amelynek a differenciálegyenlete (2) alakúra hozható, harmonikus rezgőmozgás lesz, melynek a megoldása (1) alakú, ahol A-t és φ_0-t a kezdeti feltételekből határozhatjuk meg.

3. Összefoglaló

A harmonikus rezgőmozgás legegyszerűbb típusának példáján keresztül mutattam rá arra, hogy milyen sok matematikai előismeret szükséges egy-egy tantárgy témáinak megértéséhez. Az adott tárgyalásmód sok esetben olyan ismeretekre is épül, amelyeknek a hallgató önhibáján kívül nincs a birtokában. Tanuláselméleti kutatások bizonyítják, hogy az új anyag akkor sajátítható el könnyen és jól, ha a tanuló fejében már vannak olyan előismeretek, amelyekhez lehet azt kötni. Ezek hiányában az új anyag lóg a levegőben, megértése és beépülése helyett bemagolással tanulható meg, amely így alapok nélküli, rövidéletű tudást eredményez.

A harmonikus rezgőmozgást megértve elsajátítani akaró tanuló fejében számos ponton merülhet fel hiányérzet és ehhez kapcsolódó kérdés. Első az, hogy a matematika órákon példaként bemutatott differenciálegyenlet megoldása miért nem egyezik a középiskolában tanulttal? A következő pedig: a fizika órán bemutatott megoldási módszer miért tér el a matematikából tanulttól? Ha ott úgy tanították, akkor itt miért nem úgy alkalmazzuk? És fordítva: ha itt így alkalmazzuk, akkor ott miért nem ezt a módszert tanították? Hogyan értelmezzük az $e^{i\omega t}$ kifejezést?

Bízom benne, hogy a komplex számok Euler-alakjának bemutatásával és a többi kisebb kiegészítéssel sikerült a hiányzó ismereteket pótolni, a kétféle megoldási módszert összeegyeztetni. A csillapodó rezgések és a kényszerrezgések tárgyalása ezekkel a kiegészítésekkel már könnyebben érthető, és így talán hallgatóink sem félnek majd e három tétel közül húzni.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni egykori tanáromnak és témavezetőmnek, Dr. Papp Györgynek, hogy annak idején rám bízta a csillapodó rezgőmozgások című előadás megtartását és ehhez rendelkezésemre bocsátotta saját jegyzeteit.

Irodalomjegyzék

[1] **Geomatech, Gulyás E., Éder O., Muskovits I.**, A harmonikus rezgőmozgás és a körmozgás kapcsolata, https://www.geogebra.org/m/vdbzaT4D#material/fRJTxioP

[2] **Sulinet**, Fizika, A kitérés-idő függvény és a harmonikus rezgőmozgás, https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/termeszettudomanyok/fizika/fizika-9-evfolyam/a-kiteres-ido-fuggveny-es-a-harmonikus-rezgomozgas/a-harmonikus-rezgomozgas-es-a-kormozgas-kapcsolata

[3] **Holics, L.,** Fizika, gimnázium III. osztály, Tankönyvkiadó, Budapest (1986), 7-37.

[4] **Dégen, Cs., Elblinger, F., Simon, P.,** Fizika 11 a középiskolák számára, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Budapest (2015), 13-17.

[5] **Geomatech**, Harmonikus rezgőmozgás és körmozgás kapcsolata (Extra) https://www.geogebra.org/m/vdbzaT4D#material/YhN2jtm0
[6] **Budó, Á.,** Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
[7] **Bosznay, Á.,** Mechanikai lengéstan I-II., Kézirat, Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Kar, Tankönyvkiadó, Budapest, 1961.
[8] **Barta, E., Nagy, Zs., Salay, L.,** Matematika 1.: EMK/SKK – BSc, Sopron, Magyarország: Soproni Egyetem Kiadó, 2018.
[9] **Papp Gy.**, Rezgőmozgás, https://www.youtube.com/watch?v=AlIUPVphuXM
[10] http://elmmech.uw.hu/elmfejezet2.html
[11] **Gyémánt I.**, Elméleti mechanika, Második fejezet: Rezgések, 2008. http://titan.physx.u-szeged.hu/~gyemant/02.pdf
[12] **Horváth, J.,** Matematika II. Soproni Egyetem, Sopron, 1998.
[13] **Horváth, J.,** Matematika I. Soproni Egyetem, Sopron,1998.
[14] **Standeisky, I.,** Villamosságtan, Universitas-Győr Kht., Győr, 2005.

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
IX. kötet, 2021 63–75

doi:10.20312/dim.2021.07

Áttekintés a hiperbolikus Pascal tetraéderekről

Németh László
Soproni Egyetem
Informatikai és Matematikai Intézet
nemeth.laszlo@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A binomiális együtthatók háromszög alakban való elrendezése, az ún. Pascal háromszög a matematika számos területén ismert és használt. Ennek magasabb dimenziós változatainak az un. Pascal tetraédernek és szimplexnek a 3- és 4-dimenziós hiperbolikus, valamint egy érdekes $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ térbeli változatát mutatjuk be összefoglaló formában. Meghatározzuk a szintről szintre való növekedéseket leíró rekurziókat.

ABSTRACT. Pascal's triangle is a triangular arrangement of the binomial coefficients, which is well-known and used in several fields of mathematics. In our review we introduce its special higher dimensional generalizations, the so-called Pascal tetrahedron, the Pascal simplex, and an interesting version of the tetrahedron in the space $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$. We give the growings of layers by layers with recurrence relations.

1. Bevezetés

A binomiális együtthatók háromszög alakban való elrendezése már az ókori Indiában, Perzsiában és később Kínában is ismert volt. Az újkori matematikában Blaise Pascal volt az első, aki összefoglalta az addigi ismereteket erről az aritmetikai háromszögről [21]. Azóta a matematikának csaknem az összes területén használt, Pascalról elnevezett háromszögnek a kutatók számos érdekes és hasznos tulajdonságát fedezték fel és nagy számú általánosítását adták meg (lásd [19] irodalomjegyzéke). Németh és Szalay [19]-ben összefoglaló jelleggel egy újabb típusú általánosítást, az un. hiperbolikus Pascal háromszögeket [2] mutatta be, amelyről egy rövid angol nyelvű áttekintés található a [3] összefoglalóban. További tulajdonságok a [2, 12, 16–18] tudományos munkákban részletesen megtalálhatók.

A jelenlegi publikáció célja, hogy [19] folytatásaként a hiperbolikus Pascal háromszögek magasabb dimenziós általánosításait és ezek ismert tulajdonságaikról összefoglaljuk. A következő három fejezetben általánosítjuk definíciónkat 3- és 4-dimenziós hiperbolikus térben egy kocka és egy szimplex mozaikra, így kapjuk a hiperbolikus Pascal tetraédert (más néven a hiperbolikus Pascal piramist) és a hiperbolikus Pascal szimplexet [11, 13]. Vizsgáljuk ezen aritmetikai objektumok legfontosabb tulajdonságait. Továbbá a $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ térben, ami egyike az un. 3-dimenziós Thurston geometriáknak és a $\mathbf{H}^2$ hiperbolikus sík és az $\mathbf{R}$ valós egyenes direkt szorzataként ismert, szintén definiálunk egy Pascal tetraéder osztályt a tér kocka mozaikjain, aminek a legfontosabb tulajdonságait is bemutatjuk [14].

KULCSSZAVAK. Hiperbolikus Pascal tetraéder, hiperbolikus tér, rekurzív sorozatok.
KEYWORDS. Hyperbolic Pascal tetrahedron, hyperbolic space, recursive sequences.

2. Hiperbolikus Pascal tetraéder

A Pascal háromszög 3-dimenziós analógja a Pascal tetraéder, amelyt Pascal piramisnak is neveznek (a 2. ábrának a bal oldali részábrája). Itt a szintek háromszögek, az n. szint oldalai megegyeznek a Pascal háromszög n. soraival és minden belső szám egyenlő a megelőző szinten közvetlenül "fölötte" levő három szám összegével [1, 4, 6, 7].

A 3-dimenziós térben egy szabályos mozaikot a $\{p, q, r\}$ Schläfli szimbólummal szokás jelölni, ahol $\{p, q\}$ jelöli a cella típusát, $\{q, r\}$ pedig a csúcsalakzat típusát (mindkettő gömbi szabályos mozaiknak is tekinthető). Az euklideszi térben csak egy szabályos mozaik létezik, amely a jól ismert $\{4,3,4\}$ kockamozaik. Ellenben a hiperbolikus térben már 15 különböző szabályos mozaikot különböztetünk meg, melyek közül csak 4 korlátos tartományú és csak egynek, a $\{4,3,5\}$-nek, a cellái kockák (néhány további részlet [5, 15, 25]-ben).

A következőkben a síkbeli hiperbolikus Pascal háromszögek mintájára definiáljuk a hiperbolikus Pascal tetraédert, amelyet a hiperbolikus tér egyetlen $\{4,3,5\}$ kockamozaikjára alapozunk.

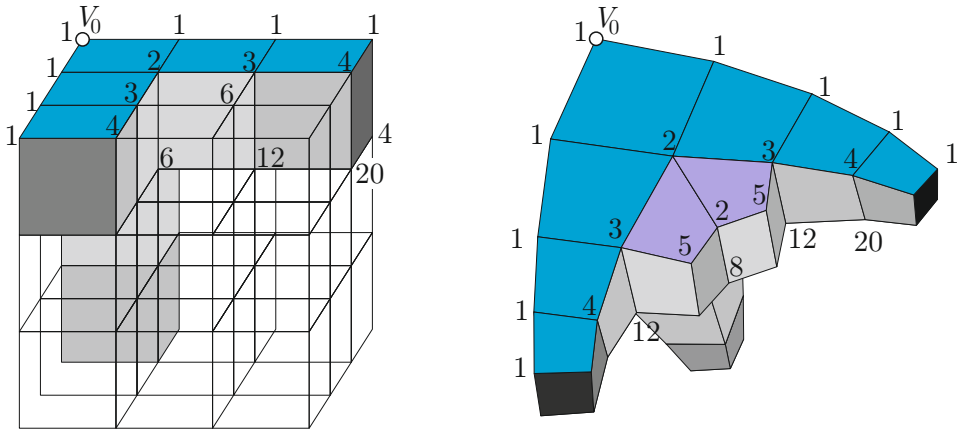
Először is foglaljuk össze az euklideszi $\{4,3,4\}$ és a hiperbolikus $\{4,3,5\}$ kockamozaik legfontosabb tulajdonságait. Mindkettőt $\{4,3\}$ kockák alkotják, az euklideszi esetben a csúcsalakzat a $\{3,4\}$ oktaéder, míg a hiperbolikusban a $\{3,5\}$ ikozaéder. (A csúcsalakzatot egy tetszőleges csúcsponthoz legközelebb lévő csúcspontok alkotják.) A kockák száma egy tetszőleges csúcs körül megegyezik a csúcsalakzat lapjainak számával, azaz 8-cal, illetve 20-szal. Ha a mozaikot rácsként vagy végtelen gráfként tekintjük, akkor bármely csúcs fokszáma a csúcsalakzat csúcsainak száma, azaz 6, illetve 12. Minden mozaikélt 4, illetve 5 kocka vesz körül.

Most definiáljuk a $\mathcal{P}$ részmozaikot, ami tartalmazni fogja a hiperbolikus Pascal tetraédert. Tekintsünk egy kockát a hiperbolikus $\{4,3,5\}$ mozaikból, mint a $\mathcal{P}$ alapcelláját és legyen V_0 az egyik csúcsa. Vegyünk három kockát a mozaikból, melyeknek közös egy-egy lapja az alapkockával, de nem tartalmazzák a V_0 csúcspontot. (Az 1. ábra mutatja a konstrukciót mindkét esetben.) Tükrözzük ezeket a kockákat az alapkockával közös lapjukkal ellentétes lapjukra, majd újra és újra határtalanul tükrözzük őket az ellentétes lapjukra. Ily módon megkapjuk a $\mathcal{P}$ határának "éleit" (az 1. ábrán kék – nyomtatásban sötétszürke – kockák). Végül legyen e határok által meghatározott legszűkebb konvex részmozaik a $\mathcal{P}$, melynek alakja hasonlít egy végtelen tetraéderhez. (Euklideszi esetben $\mathcal{P}$ egy térnyolcad.)

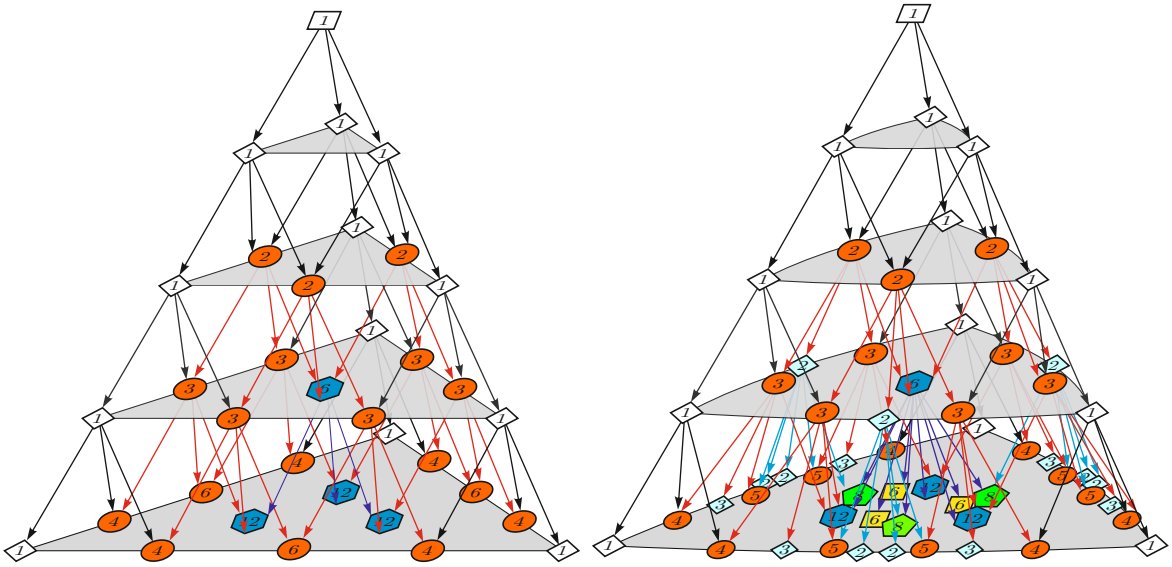
Legyen $\mathcal{G}_\mathcal{P}$ az a gráf, amelynek csúcsai és élei megegyeznek a $\mathcal{P}$-hez tartozó mozaik-csúcspontokkal, illetve mozaik-élekkel. Irányítsuk $\mathcal{G}_\mathcal{P}$ éleit a V_0 csúcsból kiindulva és tőle távolodva. A gráf egy tetszőleges V csúcsához rendeljük hozzá azt a számot, amely a legrövidebb utak számát adja V_0-tól V-ig $\mathcal{P}$ élei mentén. (Néhány csúcshoz rendelt szám is látható az 1. ábrán.) Az így kapott $\mathcal{G}_\mathcal{P}$ gráfot nevezzük Pascal tetraédernek (vagy Pascal piramisnak), hiperbolikus esetben hiperbolikus Pascal tetraédernek (vagy hiperbolikus Pascal piramisnak), melyet a továbbiakban $\mathcal{HPP}$-vel jelölünk.

Legyen a Pascal tetraéder 0. szintje a V_0 pont, az n. szint álljon azokból a csúcspontokból, amelyek pontosan n éltávolságra (a legrövidebb utakhoz tartozó élek száma) vannak V_0-tól. A 2. ábrán balról az euklideszi és jobbról a hiperbolikus Pascal tetraéder első néhány szintje látható.

A hiperbolikus Pascal tetraéder csúcspontjait különböző típusokba sorolhatjuk. Mivel a $\mathcal{HPP}$ minden lapja $\mathcal{HPT}_{4,5}$ lesz, ezért a lapokon A, B és 1 típusú pontok vannak. Mivel egy kockának minden csúcsában három él van, ezért a $\mathcal{HPP}$ növekedése során (lépkedés az $(i - -1)$. szintről az i. szintre) egy tetszőleges i. szinten levő V belső csúcspontot az $(i-1)$. szintről három, kettő vagy egy éllel lehet elérni. Ez alapján legyen az i. szint egy belső csúcspontja C, D vagy E típusú, ha három, kettő vagy csak egy éllel kapcsolódik az $(i-1)$. szinthez.

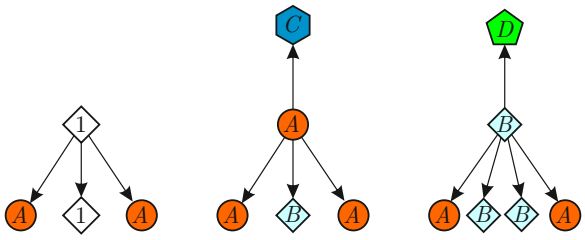


1. ábra. $\mathcal{P}$ euklideszi és hiperbolikus konstrukciója



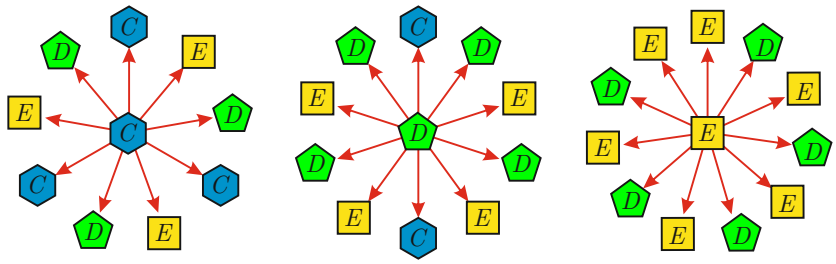
2. ábra. Euklideszi és hiperbolikus Pascal tetraéder

A $\mathcal{HPP}$ növekedési algoritmusának meghatározásához a csúcsponthoz tartozó csúcsalakzatokat (melyek ikozaéderek) kell megvizsgálni minden típusú pont esetén. Ezeknek az egyszerűsített változatai láthatók a 3. és a 4. ábrákon (bővebben [11]).



3. ábra. Növekedési módszer a $\mathcal{HPP}$ lapjainál

Legyen az n. szinten levő A, B, C, D és E típusú pontok száma a_n, b_n, c_n, d_n és e_n. Ekkor a 3. és a 4. ábrák felhasználásával a következő tételt (1. Tételt) kapjuk. Például a (1) egyenletrendszer harmadik egyenlete a következőképpen adódik. Minden A típusú ponthoz egy új, a következő szinten levő C típusú pont tartozik (3. ábra). Ez az érték a C és D típusú pontok esetén három, illetve kettő (4. ábra). Mivel minden egyes új C típusú pont három előző szinten



4. ábra. Növekedési módszer a $\mathcal{HPP}$ belsejében

lévő ponthoz is tartozik, ezért a kapott értékeket el kell osztanunk hárommal, a multiplicitás elkerülése végett. A többi típusú ponthoz nem tartozik új C pont.

1. Tétel. [11]. *A különböző típusú csúcspontok számának növekedését az*

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n + b_n + 3, \\ b_{n+1} & = & a_n + 2b_n, \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + c_n + \frac{2}{3}d_n, \\ d_{n+1} & = & \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}c_n + 2d_n + \frac{5}{2}e_n, \\ e_{n+1} & = & 3c_n + 4d_n + 6e_n \end{array} \tag{1}$$

lineáris inhomogén egyenletrendszer adja meg $(n \geq 1)$*, ahol a kezdőelemek* $(n = 1)$ *mind zérók.*

Jelöljük az n. szinten levő összes csúcspont számát s_n-nel, ekkor $s_0 = 1$ és

$$s_n = a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + 3 \qquad (n \geq 1).$$

2. Tétel. [11]. *Az* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$ *és* $\{s_n\}$ *sorozatokat mind ugyanazzal az ötödrendű rekurzióval adhatjuk meg, amely*

$$x_n = 12x_{n-1} - 37x_{n-2} + 37x_{n-3} - 12x_{n-4} + x_{n-5} \qquad (n \geq 6).$$

A rekurzív sorozatok kezdőelemeit az 1. táblázat tartalmazza. Továbbá az $\{a_n\}$ *és a* $\{b_n\}$ *sorozat másodrendű rekurzióval is megadható:*

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} + x_{n-3} \qquad (n \geq 4).$$

A sorozatok explicit formulái:

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & \left(-\frac{9}{2} + \frac{21}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n + \left(-\frac{9}{2} - \frac{21}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n + 3, \\ b_n & = & \left(3 - \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n + \left(3 + \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n - 3, \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \left(-\frac{33}{10}+\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n+\left(-\frac{33}{10}-\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n+\left(\frac{122}{15}-\frac{21}{10}\sqrt{15}\right)\alpha_3^n \\
&\quad +\left(\frac{122}{15}+\frac{21}{10}\sqrt{15}\right)\alpha_4^n+\frac{1}{3}, \\
d_n &= \left(\frac{27}{5}-\frac{12}{5}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n+\left(\frac{27}{5}+\frac{12}{5}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n+\left(-\frac{213}{20}+\frac{11}{4}\sqrt{15}\right)\alpha_3^n \\
&\quad +\left(-\frac{213}{20}-\frac{11}{4}\sqrt{15}\right)\alpha_4^n-\frac{3}{2}, \\
e_n &= \left(-\frac{21}{10}+\frac{9}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n+\left(-\frac{21}{10}-\frac{9}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n+\left(\frac{31}{10}-\frac{4}{5}\sqrt{15}\right)\alpha_3^n \\
&\quad +\left(\frac{31}{10}+\frac{4}{5}\sqrt{15}\right)\alpha_4^n+1, \\
s_n &= \left(-\frac{3}{2}+\frac{9}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n+\left(-\frac{3}{2}-\frac{9}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n+\left(\frac{7}{12}-\frac{3}{20}\sqrt{15}\right)\alpha_3^n \\
&\quad +\left(\frac{7}{12}+\frac{3}{20}\sqrt{15}\right)\alpha_4^n+\frac{17}{6},
\end{aligned}
$$

ahol $\alpha_1=(3+\sqrt{5})/2$, $\alpha_2=(3-\sqrt{5})/2$, $\alpha_3=4+\sqrt{15}$ *és* $\alpha_4=4-\sqrt{15}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	0	3	6	12	27	66	168	435	1134	2964
b_n	0	0	0	3	12	36	99	264	696	1827	4788
c_n	0	0	0	1	3	9	34	174	1128	8251	63315
d_n	0	0	0	0	3	24	177	1347	10467	82029	644808
e_n	0	0	0	0	3	39	357	2952	23622	186984	1474773
s_n	1	3	6	13	36	138	736	4908	36351	280228	2190651

1. táblázat. *A különböző típusú csúcspontok száma* $(n \le 10)$

Jelölje $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$, $\hat{c}_n$, $\hat{d}_n$ és $\hat{e}_n$ az n. szinten levő A, B, C, D és E típusú pontok értékeinek összegét és legyen a szint összes értékének az összege $\hat{s}_n$. Ekkor a következő 3. tétel adja meg a rekurzív összefüggést az egyes sorozatok esetén. (A 2. tételhez hasonló, sokkal összetettebb állítást is megfogalmazhatunk, amely [11]-ben megtalálható.)

3. Tétel. [11]. *Az* $\{\hat{a}_n\}$, $\{\hat{b}_n\}$, $\{\hat{c}_n\}$, $\{\hat{d}_n\}$, $\{\hat{e}_n\}$ *és* $\{\hat{s}_n\}$ *sorozatokat egy közös hatodrendű rekurzióval írhatjuk le, amely az*

$$\hat{x}_n = 18\hat{x}_{n-1}-99\hat{x}_{n-2}+226\hat{x}_{n-3}-224\hat{x}_{n-4}+92\hat{x}_{n-5}-12\hat{x}_{n-6} \qquad (n\ge 7),$$

lineáris homogén rekurzió.

A két utóbbi tétel bizonyítása azon alapszik, hogy a megadott rekurzív egyenletrendszereknek meghatározzuk az együttható mátrixait, majd ezeknek a mátrixoknak a karakterisztikus egyenleteit kiszámoljuk, amelyek az egyes sorozatoknak is a karakterisztikus egyenletei lesznek. Némely sorozat esetén speciálisan lehet csökkenteni a rekurzió rendjét.

3. Hiperbolikus Pascal szimplex

A 4-dimenziós térben a hiperkocka a természetes általánosítása a négyzetnek és a kockának. Coxeter [5]-ben megmutatta, hogy a hiperkockákkal is lehet szabályos mozaikot képezni, nem csak az euklideszi, hanem a hiperbolikus térben is. Ezek a $\{4,3,3,4\}$ és a $\{4,3,3,5\}$ mozaikok. A Pascal háromszög 4-dimenziós változata a Pascal szimplex, amely az euklideszi esetben a $\{4,3,3,4\}$ mozaikra, míg a hiperbolikus térben a $\{4,3,3,5\}$ mozaikra alapozható.

A $\{4,3,3,5\}$ hiperbolikus mozaik minden cellája a $\{4,3,3\}$ hiperkocka, a csúcsalakzata pedig a $\{3,3,5\}$ szimbólummal jelölt 600-cella. (Mindkét szabályos politóp tekinthető egy 4-dimenziós gömb 3-dimenziós felületén levő 3-dimenziós gömbi mozaiknak.) A hiperkocka jól ismert, ellenben a 600-cella nem annyira, ezért nézzük át a legfontosabb jellemzőit. A 3-dimenziós lapjai, cellái, a $\{3,3\}$ tetraéderek, a (2-dimenziós) lapjai szabályos háromszögek és az egy csúcshoz legközelebbi csúcsai egy $\{3,5\}$ ikozaédert formálnak, tehát minden csúcs 12 élre, 30 lapra és 20 cellára illeszkedik. Minden él 5 lapnak és 5 cellának, valamint minden lap 2 cellának eleme. A 600-cella csúcsainak, éleinek, lapjainak és celláinak száma rendre 120, 720, 1200 és 600. További részletek a 600-cella szerkezetéről [23]-ban találhatók.

Tekintve a $\{4,3,3,5\}$ mozaiknak egy tetszőleges V csúcspontját, kapjuk, hogy a V-t körülvevő hiperkockák száma 600. Továbbá egy mozaik élt 20 hiperkocka fog közre. (A mozaikról néhány további tulajdonság, például [5, 10, 15]-ban található.)

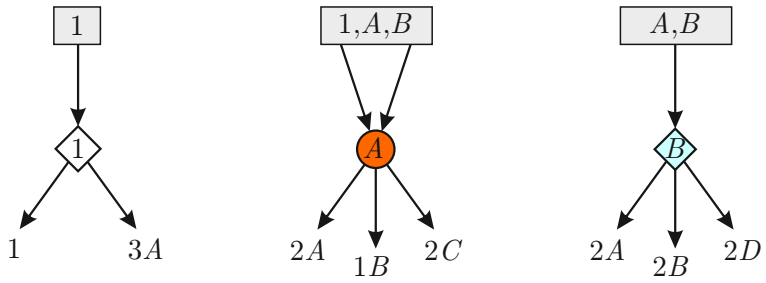
A 4-dimenziós hiperbolikus Pascal szimplex ($\mathcal{HPS}$) definíciója, legfontosabb tulajdonságainak meghatározása teljesen azonos módon tárgyalható, mint ahogyan a hiperbolikus Pascal tetraéder esetén tettük [11].

Tekintsünk a mozaiknak egy tetszőleges csúcspontját, legyen ez V_0, mely egyben a $\mathcal{HPS}$ kezdő csúcspontja is lesz. Jelöljük ezt a csúcspontot 1-gyel, továbbá a mozaik minden egyes csúcspontját jelöljük azzal a számmal, ami a mozaik élek menti legrövidebb utak számát adja a tekintett pont és a kezdőpont között. A legrövidebb utak a V_0 pontból kiinduló irányított gráfot adják. Definiáljuk egy konvex $\mathcal{P}$ részét a mozaiknak a következőképpen. Először tekintsünk egy hiperkockát, aminek egyik csúcsa V_0 és legyen a V_0-lal ellentétes csúcsa V_1. A hiperkocka csúcsai közül ehhez a csúcsponthoz van hozzárendelve a legnagyobb szám, ami 24. Másodszor vegyük a további hiperkockáit a mozaiknak, amelyeknek még csúcspontja a V_1. Most tekintsük az újonnan vett hiperkockák azon csúcspontjait, amelyek legtávolabb vannak V_0-tól (ezekhez vannak hozzárendelve a legnagyobb számok az eddig tekintett hiperkockák csúcspontjai közül) és jelöljük ezeket V_2-vel, majd rakjuk körbe őket a mozaik hiperkockáival. Ezután rakjuk körbe újra a legnagyobb értékű csúcspontokat hiperkockákkal, és folytassuk így tovább az algoritmust határtalanul. Majd az így kapott hiperkockákat tartalmazó legszűkebb konvex részmozaikot tekintsük $\mathcal{P}$-nek. Végül $\mathcal{P}$ mozaikrész V_0-tól való éltávolság alapján számozott csúcsai és irányított élei adnak egy V_0 kezdőpontú, egy végtelen szimplexhez hasonlító irányított gráfot, amit hiperbolikus Pascal szimplexnek ($\mathcal{HPS}$) nevezünk. Nyilvánvalóan, a kezdőelemtől eltekintve, egy tetszőleges csúcshoz tartozó szám, a bejövő élek kezdőpontjaihoz rendelt számok összege.

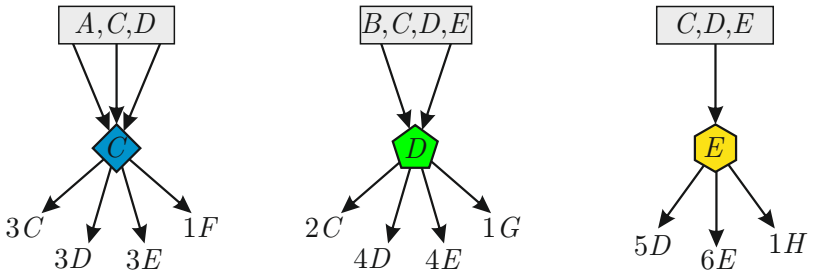
A hiperbolikus Pascal szimplex n. szintje álljon azokból a csúcspontokból amelyek pontosan n él távolságra vannak a V_0 csúcsponttól (a legrövidebb út hossza V_0-tól éppen n). Ekkor V_0 a 0. szint. A 0. szinttől tekintve minden szint tetraéder alakot vesz fel. A $\mathcal{HPS}$ 3-dimenziós oldallapjai hiperbolikus Pascal tetraéderek ($\mathcal{HPP}$) és ezeknek a 2-dimenziós oldallapjai pedig hiperbolikus Pascal háromszögek ($\mathcal{HPT}_{4,5}$). Az n. szint lapjai és élei rendre megegyeznek a $\mathcal{HPP}$ n. szintjével és a $\mathcal{HPT}_{4,5}$ n. sorával.

A hiperbolikus Pascal szimplex minden elemét a bejövő és kimenő élei alapján csoportosíthatjuk. Mivel minden hiperlapja $\mathcal{HPP}$, ezért a rajta lévő csúcspontok típusai legyenek 1, A, B, C, D, illetve E, ahogyan ezt már korábban definiáltuk. Általánosan, a $\mathcal{HPS}$ belsejében minden

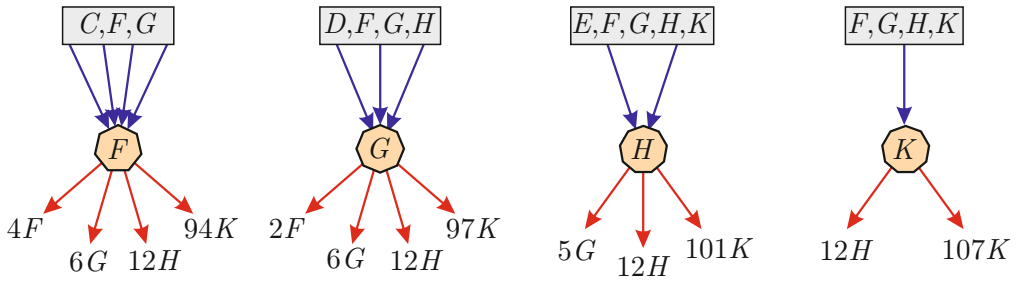
csúcsnak négy, három, kettő vagy egy bejövő éle van, jelöljük ezeket rendre F, G, H, illetve K típussal. Minden típusú csúcs esetén a kimenő éleken levő, új, következő szinten lévő típusú pontok meghatározásához a típusokhoz tartozó csúcsalakzatokat (melyek 600-cellák) kell megvizsgálni. Az eredményeket az 5., a 6. és a 7. ábrák foglalják össze. Az egyes típusok jelei előtti számok azt mutatják, hogy abból a típusú csúcspontból hány darab van. A kétdimenziós lapokon lévő csúcspontok esetén a bejövő és a kimenő élek száma összesen 7 (az szimplex éleinél csak 5), míg a háromdimenziós lapok belsejében lévő csúcspontok esetén 13. A $\mathcal{HPP}$ belső pontja esetén ez a szám 120.



5. ábra. A 2-dimenziós lapok növekedése a $\mathcal{HPS}$-ben



6. ábra. A 3-dimenziós lapok növekedése a $\mathcal{HPS}$-ben



7. ábra. Növekedés a $\mathcal{HPS}$ belsejében

Jelölje rendre a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n, k_n és v_n az n. szinten levő A, B, C, D, E, F, G, H, K és 1 típusú pontok számát, valamint s_n a szint összes csúcspontját. Ekkor a következő tételek igazak a sorozatokra.

4. Tétel. [13]. *A hiperbolikus Pascal szimplex különböző típusú pontjainak számát meghatározó sorozatok a következő lineáris homogén rekurzív egyenletrendszerrel adhatók meg* $(n \geq 1)$,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(2a_n + 2b_n + 3v_n\right), \\
b_{n+1} &= a_n + 2b_n, \\
c_{n+1} &= \frac{1}{3}\left(2a_n + 3c_n + 2d_n\right), \\
d_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(2b_n + 3c_n + 4d_n + 5e_n\right), \\
e_{n+1} &= 3c_n + 4d_n + 6e_n, \\
f_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(c_n + 4f_n + 2g_n\right), \\
g_{n+1} &= \frac{1}{3}\left(d_n + 6f_n + 6g_n + 5h_n\right), \\
h_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(e_n + 12f_n + 12g_n + 12h_n + 12k_n\right), \\
k_{n+1} &= 94f_n + 97g_n + 101h_n + 107k_n \\
v_{n+1} &= v_n,
\end{aligned} \tag{2}$$

ahol $v_1 = 4$ *és a többi kezdőelem zéró.*

5. Tétel. [13]. *Az* $\{a_n\}$, …, $\{k_n\}$ *és* $\{s_n\}$ *sorozatok mindegyike az*

$$\begin{aligned}
x_n = 128x_{n-1} - 1795x_{n-2} + 8837x_{n-3} - 19239x_{n-4} + 19239x_{n-5} \\
- 8837x_{n-6} + 1795x_{n-7} - 128x_{n-8} + x_{n-9}, \qquad (n \geq 10)
\end{aligned} \tag{3}$$

közös, kilencedrendű lineáris homogén rekurzív egyenlettel adható meg és a kezdőelemek a 4. tétel (2) *egyenletrendszeréből meghatározhatók.*

Jelölje $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$, $\hat{c}_n$, $\hat{d}_n$, $\hat{e}_n$, $\hat{f}_n$, $\hat{g}_n$, $\hat{h}_n$, $\hat{k}_n$ és $\hat{v}_n$ az n. szinten levő megfelelő típusú pontok értékeinek az összegét, valamint $\hat{s}_n$ a szint összes értékének összegét. Ekkor a következő tételt fogalmazhatjuk meg.

6. Tétel. [13]. *Az* $\{\hat{a}_n\}$, …, $\{\hat{k}_n\}$ *és* $\{\hat{s}_n\}$ *sorozatok az*

$$\begin{aligned}
\hat{x}_n = 147\hat{x}_{n-1} - 3635\hat{x}_{n-2} + 36277\hat{x}_{n-3} - 175292\hat{x}_{n-4} + 445156\hat{x}_{n-5} - 608920\hat{x}_{n-6} \\
+ 438532\hat{x}_{n-7} - 151320\hat{x}_{n-8} + 19344\hat{x}_{n-9} - 288\hat{x}_{n-10}, \qquad (n \geq 11)
\end{aligned}$$

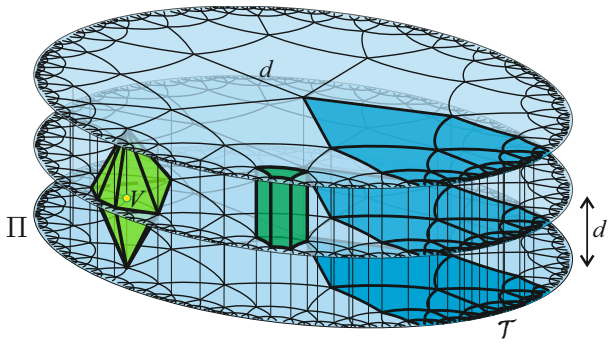
tizedrendű lineáris homogén rekurzióval adhatók meg. (A sorozat kezdőelemei [13]-ban találhatók.)

4. Pascal tetraéder a $\mathrm{H}^2 \times \mathrm{R}$ térben

A diszkrét geometria problémái, eredményei általában az n-dimenziós állandó görbületű (euklideszi, hiperbolikus és szférikus) geometriákra korlátozódnak, habár az utóbbi években sok kutatás irányult a 3-dimenziós térbeli, un. Thurston geometriákra. E nyolc lokális homogén geometria magába foglalja a három konstans görbületű (minden irányban azonos görbületű)

$\mathbf{E}^3$, $\mathbf{H}^3$ és $\mathbf{S}^3$ geometriát, továbbá az öt lokális homogén, de más-más irányokban eltérő görbületű $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$, $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$, **Sol**, **Nil** és $\widetilde{\mathbf{SL}_2\mathbf{R}}$ geometriákat ([8,9,20,24]). Az egyikük tere, a $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ tér (a geometriát és a teret, amin a geometria érvényes, ugyanúgy jelöljük), a hiperbolikus sík $\mathbf{H}^2$ és a valós egyenes $\mathbf{R}$ direkt szorzata. A továbbiakban ebben a térben megadunk egy kockamozaik típust ([22]) és ezen definiáljuk a Pascal tetraéder egy újabb általánosítását.

Tekintsünk egy Π hiperbolikus síkot, mint egy alap (egy referencia) sík a $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ térben és tekintsük továbbá a sík $\{4,q\}$ $(q\geq 5)$ szabályos mozaikját. Legyen d ezen mozaik éleinek a hossza. Tekintsük azokat a hiperbolikus síkokat, amelyek párhuzamosak Π-vel és kd $(k\in\mathbb{Z}^+)$ távolságra vannak tőle (ebben az irányban euklideszi párhuzamosság és távolság van érvényben). Adjuk meg ezeken a síkokon is a $\{4,q\}$ mozaikot úgy, hogy a különböző síkokon lévő, de egymásnak megfelelő pontokat összekötve a kapott élek is d hosszúságúak legyenek (a síkok közötti élek merőlegesek a síkokra). Legyen egy h^2r kocka az egymást követő síkok egymásnak megfelelő négyzeteinek konvex burka. A h^2r kockák összessége adja a $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ térben h^2r kockamozaikját, amit a hiperbolikus síkbeli szabályos $\{4,q\}$ mozaikra alapoztunk. A 8. ábra három egymást követő hiperbolikus síkot és rajtuk a $\{4,5\}$ mozaikot mutatja. Az egymás "fölötti" négyzetek kockákat határoznak meg. Az ábrán ez egy sötétzöld (nyomtatásban sötét szürke) hasábként van szemléltetve. A 8. ábra világosabb ötszög alapú gúlája és annak tükörképe együtt a mozaikhoz tartozó csúcsalakzatot szemlélteti.

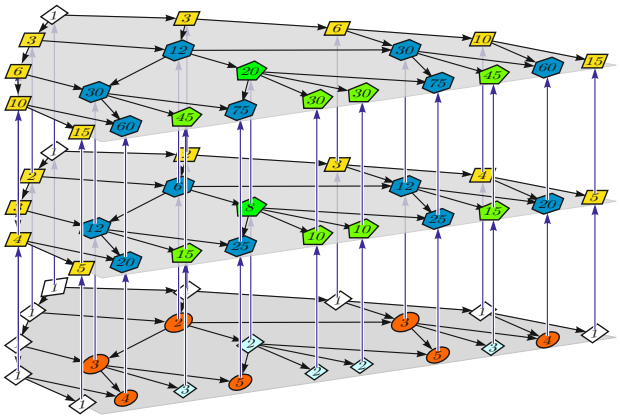


8. ábra. A $\{4,5\}$ mozaikra alapozott h^2r kockamozaik

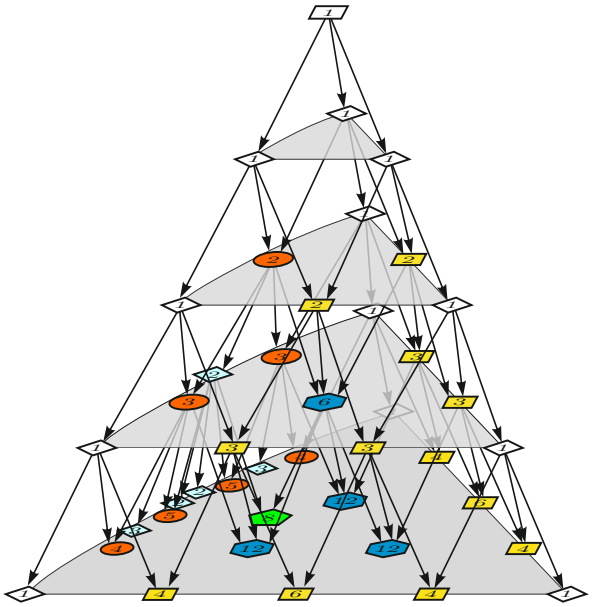
A h^2r kockamozaikon a 2. fejezetben leírt hiperbolikus Pascal tetraéderhez teljesen hasonló geometriai konstrukcióval definiálhatjuk a $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ tér $\mathcal{PP}_{4,q}$ Pascal tetraéderét (vagy Pascal piramisát). E Pascal tetraéder konstruktív megadását nem részletezzük (részletek [14]), helyette két ábrát mutatunk, melyek alapja a $\{4,5\}$ hiperbolikus mozaik. A 9. és a 10. ábrákon a $\mathcal{PP}_{4,5}$ Pascal tetraéder látható, először a 8. ábrán látható sötétkék (nyomtatásban sötétszürke) mozaikrészlet kinagyításával, másodszor már tetraéder formában.

Nyilvánvalóan $\mathcal{PP}_{4,q}$ -nak az egyik lapja $\mathcal{HPT}_{4,q}$, a másik kettő pedig az eredeti euklideszi Pascal háromszög. A $\mathcal{HPT}_{4,q}$ oldalon 3 típusú pontot különböztetünk meg, az A, B és 1 típusokat, az euklideszi Pascal háromszög lapokon pedig kettőt, legyenek ezek a C és az 1 típusok. A Pascal tetraéder belsejében pedig két újabb típust definiálhatunk, a D és E típust, D-nek három, míg E-nek kettő bejövő éle van.

Ha a_n, b_n, c_n, d_n és e_n jelöli rendre az n. szinten levő A, B, C, D és E típusú pontok számát, akkor a sorozatokra a következő (4) rekurzív egyenletrendszert kapjuk.



9. ábra. A $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ tér $\mathcal{PP}_{4,5}$ Pascal tetraédere



10. ábra. A $\mathcal{PP}_{4,5}$ Pascal tetraéder

7. Tétel. [14]. *A különböző típusú pontok számának növekedését leíró rekurzív egyenletrendszer* $(n \geq 1)$ *az*

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n + 1, \\ b_{n+1} &= (q-4)a_n + (q-3)b_n, \\ c_{n+1} &= c_n + 2, \\ d_{n+1} &= a_n + d_n, \\ e_{n+1} &= b_n + e_n, \end{aligned} \tag{4}$$

ahol minden kezdőelem $(n = 1)$ *zéró.*

Ebből pedig kapjuk a következő tételt.

8. Tétel. [14]. *Az* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$ *és* $\{s_n\}$ *sorozatok közös, negyedrendű lineáris rekurzív sorozata az*

$$x_n = qx_{n-1} + 2(1-q)x_{n-2} + qx_{n-3} - x_{n-4} \qquad (n \geq 5)$$

sorozat. A kezdőelemeket a 7. tétel (4) *egyenletrendszere nyújtja. Az* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sorozat a*

$$x_n = (q-1)x_{n-1} - (q-1)x_{n-2} + x_{n-3} \qquad (n \geq 4) \tag{5}$$

rekurzív egyenlettel is megadható, továbbá a sorozatok explicit formái az alábbiak:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{2-q}{2} + \frac{D+2}{2D}\sqrt{D}\right)\alpha_1^n + \left(\frac{2-q}{2} - \frac{D+2}{2D}\sqrt{D}\right)\alpha_2^n + 1,\\
b_n &= \left(\frac{q-3}{2} + \frac{1-q}{2q}\sqrt{D}\right)\alpha_1^n + \left(\frac{q-3}{2} - \frac{1-q}{2q}\sqrt{D}\right)\alpha_2^n - 1,\\
d_n &= \left(\frac{q^2-5q+5}{2(q-4)} - \frac{q^2-3q-1}{2D}\sqrt{D}\right)\alpha_1^n + \left(\frac{q^2-5q+5}{2(q-4)} + \frac{q^2-3q-1}{2D}\sqrt{D}\right)\alpha_2^n\\
&\quad + n - \frac{1}{q-4} + 1,\\
e_n &= \left(\frac{2-q}{2} + \frac{D+2}{2D}\sqrt{D}\right)\alpha_1^n + \left(\frac{2-q}{2} - \frac{D+2}{2D}\sqrt{D}\right)\alpha_2^n - n + 2,\\
s_n &= \left(\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2D}\right)\alpha_1^n + \left(\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2D}\right)\alpha_2^n + 2n - \frac{1}{q-4} + 1,
\end{aligned}$$

ahol $D = q(q-4)$, $\alpha_1 = (q-2+\sqrt{D})/2$ *és* $\alpha_2 = (q-2-\sqrt{D})/2$.

9. Megjegyzés. Ha $q \geq 5$, akkor az s_n sorozat generátor függvénye

$$g(x) = \frac{1-(q-3)x-(q-4)x^2}{1-qx+(2q-2)x^2-qx^3+x^4}.$$

10. Tétel. [14]. *Az egyes típusú pontokhoz és a teljes* n. *szinthez tartozó értékek összegét meghatározó* $\{\hat{a}_n\}$, $\{\hat{b}_n\}$, $\{\hat{c}_n\}$, $\{\hat{d}_n\}$, $\{\hat{e}_n\}$ *és* $\{\hat{s}_n\}$ *sorozatokat leíró hatodrendű lineáris homogén rekurzív egyenlet* ($n \geq 6$) *az*

$$\begin{aligned}
x_n = (2q+3)x_{n-1} + (-q^2-7q-5)x_{n-2} + (4q^2+10q+9)x_{n-3} +\\
(-5q^2-13q-10)x_{n-4} + (2q^2+12q+12)x_{n-5} + (-4q-8)x_{n-6}.
\end{aligned}$$

Irodalomjegyzék

[1] **Anatriello, G. and Vincenzi, G.**: *Tribonacci-like sequences and generalized Pascal's pyramids*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **45** (2014), No. 8, 1220–1232. doi: 10.1080/0020739X.2014.914283.

[2] **Belbachir, H., Németh, L., and Szalay, L.**: *Hyperbolic Pascal triangles*, Applied Mathematics and Computation, **273** (2016), 453–464. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.10.001.

[3] **Belbachir, H., Németh, L., and Szalay, L.**: *Properties of hyperbolic Pascal triangles*, AIP Conference Proceedings, **1867** (2017), No. 1, 020031–1—020031–5. doi: 10.1063/1.4994434.

[4] **Bondarenko, B. A.**: *Generalized Pascal Triangles and Pyramids, Their Fractals, Graphs, and Applications*, Fibonacci Association, Santa Clara, CA, 1993.

[5] **Coxeter, H. S. M.**: *Regular honeycombs in hyperbolic space*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, **3** (1956), 155–169.

[6] **Harris, J. M., Hirst, J. L., and Mossinghoff, M. J.**: *Combinatorics and Graph Theory*, Springer, 2008.

[7] **Hilton, P. and Pedersen, J.**: *Mathematics, models, and magz, Part I: Patterns in Pascal's triangle and tetrahedron*, Mathematics Magazine, **85** (2012), No. 2, 97–109.

[8] **Molnár, E., Prok, I., and Szirmai, J.**: *Classification of tile-transitive 3-simplex tilings and their realizations in homogeneous spaces*, in: *Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume* (A. Prekopa and E. Molnár, eds.), vol. 581 of *Mathematics and Its Applications*, Springer, 2006 pp. 321–363.

[9] **Molnár, E. and and Szirmai, J.**: *Symmetries in the 8 homogeneous 3-geometries*, Symmetry: Culture and Science, **21** (2010), No. 1–3, 87–117.

[10] **Németh, L.**: *On the 4–dimensional hyperbolic hypercube mosaic*, Publicationes Mathematicae, **70** (2007), No. 3–4, 291–305.

[11] **Németh, L.**: *On the hyperbolic Pascal pyramid*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, **57** (2016), No. 4, 913–927. doi: 10.1007/s13366-016-0293-7.

[12] **Németh, L.**: *Fibonacci words in hyperbolic Pascal triangles*, Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, **9** (2017), No. 2, 336–347. doi: 10.1515/ausm-2017-0025.

[13] **Németh, L.**: *Hyperbolic Pascal simplex*, International Electronic Journal of Geometry, **10** (2017), No. 2, 46–55.

[14] **Németh, L.**: *Pascal pyramid in the space* $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, Mathematical Communications, **22** (2017), 211–225.

[15] **Németh, L.**: *The growing ration of hyperbolic regular mosaics with bounded cells*, Armenian Journal of Mathematics, **9** (2017), No. 1, 1–19.

[16] **Németh, L. and Szalay, L.**: *Alternating sums in hyperbolic Pascal triangles*, Miskolc Mathematical Notes, **17** (2016), No. 2, 989–998. doi: 10.18514/MMN.2017.1793.

[17] **Németh, L. and Szalay, L.**: *Recurrence sequences in the hyperbolic Pascal triangle corresponding to the regular mosaic* $\{4,5\}$, Annales Mathematicae et Informaticae, **46** (2016), 165–173.

[18] **Németh, L. and Szalay, L.**: *Power sums in hyperbolic Pascal triangles*, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius, Seria Matematica, **26** (2018), No. 1, 189–203. doi: 10.2478/auom-2018-0012.

[19] **Németh, L. and Szalay, L.**: *Áttekintés a hiperbolikus Pascal háromszögekről (Review of the hyperbolic Pascal triangles)*, Dimenziók, Mat. Közl., **8** (2020), 61–74. doi: 10.20312/dim2020.07.

[20] **Pallagi, J., Schultz, B., and Szirmai, J.**: *Equidistant surfaces in* $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ *space*, KoG, **15** (2011), 1–4.

[21] **Pengelley, D.**: *Pascal's Treatise on the Arithmetical Triangle: Mathematical Induction, Combinations, the Binomial Theorem and Fermat's Theorem*, in: *Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles* (B. Hopkins, ed.), Mathematical Association of America, 2009 pp. 185–196. doi: 10.5948/UPO9780883859742.025.

[22] **Szirmai, J.**: *Geodesic ball packings in space for generalized Coxeter space groups*, Mathematical Communications, **17** (2012), No. 1, 151–170.

[23] **Talata, I.**: *A 120-cella és a 600-cella 3-dimenziós reprezentációiról*, Dimenziók, Mat. Közl., **6** (2018), 13–23. doi: 10.20312/dim.2018.02.

[24] **Thurston, W. P.**: *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.

[25] **Vinberg, E. B.** (ed.): *Geometry II. Spaces of Constant Curvature*, vol. 29 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1993.